СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Мерве Зенгин
Натиг Ибрагимов
Габил Ягуб

Кафказ университет, Карс, Турция
Лянкяранский государственный университет, Лянкярань, Азербайджан
Кафказ университет, Карс, Турция

э-почта: gabilya@mail.ru
э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru
э-почта: merveezengin14@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассматривается задача оптимального управления для нелинейного стационарного одномерного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым, когда критерий качества является интегралом по границе области и роль управления играют коэффициенты преломления и поглощения среды. При этом доказываются теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи оптимального управления.
Ключевые слова: уравнение квазиоптики, задача оптимального управления, градиентное слагаемое, коэффициенты преломления и поглощения

Введение

Задачи оптимального управления для линейного и нелинейного стационарного уравнения квазиоптики или для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интересы $[1-3]$. Одной из таких задач является задачей движении заряженных частиц в которой потенциал является неизвестным и подлежит определению. Известно, что если заряженная частица в постоянном однородном магнитном поле движется и направление магнитного поля выбрано вдоль оси z, тогда движение такой частицы происходит в плоскости $(x, y) \in E_2$ и это движение обычно описывается двумерным линейным уравнением Шредингера со специальным градиентным слагаемым (см. $[1, стр.82]$). Подобные задачи оптимального управления для линейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучены в работах [4, 5]. Отметим, что задачи задачи оптимального управления для линейного и нелинейного стационарного уравнений квазиоптики или нестационарного уравнений Шредингера без специального градиентного слагаемого и со специальным градиентным слагаемымв других постановках ранее подробно изучены в работах $[6-17]$ и др. Однако задачи задачи оптимального управления для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым и с интегральным критерием качества по границе области наиболее мало исследованы. Поэтому данная работа, посвященная изучению задачи оптимального управления для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым , когда управления являются коэффициентами преломления и поглощения среды и выбираются из класса измеримых ограниченных функций, зависящих от переменной z и имеющих измеримых ограниченных производных, а критерий качества является интегралом по границе области, представляет немалый научный интерес.

2. Постановка задачи

Пусть $l>0$, $L>0$ - заданные числа, $0\le x\le l$, $0\le z\le L$, $\Omega_z\equiv(0,l)\times(0,z), \Omega=\Omega_L$; $C^k([0,L],B)$- банахово пространство функций, k-раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,L]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_p(0,l)$-лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0,l)$ со степенью $p\ge 1$; $L_2(0,L;B)$– банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0,L]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_\infty(0,L;B)$–банахово пространство измеримых ограниченных на $(0,L)$ функций со значениями в банаховом пространстве B; Соболевы пространства $W_p^k(0,l), W_p^{k,m}(\Omega)$ $p\ge 1,\ k\ge 0,\ m\ge 0$, определены, например, в работах $[18-20]$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v)=\beta_0\left\|\psi(0,.)-y_0\right\|^2_{L_2(0,L)}+\beta_1\left\|\psi(l,.)-y_1\right\|^2_{L_2(0,L)}+\alpha\left\|v-\omega\right\|^2_H \tag{2.1}$$

на множестве:

$$V=\left\{v=v(z)=(v_0(z),v_1(z)):\ v_m\in \overset{0}{W}{}_2^1(0,L), |v_m(z)|\le b_m, \left|\frac{dv_m(z)}{dz}\right|\le d_m, m=0,1, \forall z\in(0,L)\right\}$$

при условиях:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+ia_1(x,z)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(z)\psi+iv_1(z)\psi+$$

$$+a_2|\psi|^2\psi=f(x,z),(x,z)\in\Omega, \tag{2.2}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\psi(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,z)}{\partial x}=0, z\in(0,L), \tag{2.4}$$

где $i=\sqrt{-1}$; $b_m>0, d_m>0,\ m=0,1,\ \alpha\ge 0, \beta_0\ge 0, \beta_1\ge 0, \beta_0+\beta_1\ne 0$- заданные числа; комплексное число a_2 удовлетворяет условиям:

$$a_2=\mathrm{Re}\,a_2+i\,\mathrm{Im}\,a_2, \mathrm{Im}\,a_2(x)>0, \mathrm{Re}\,a_2<0, \mathrm{Im}\,a_2(x)\ge 2|\mathrm{Re}\,a_2|; \tag{2.5}$$

$a_0(x), a_1(x,z), a(x)$- измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \le a_0(x) \le \mu_1,\ \overset{0}{\forall} x \in (0,l),\ \mu_0, \mu_1 = const > 0; \tag{2.6}$$

$$\left|\frac{da_0(x)}{dx}\right| \le \mu_2,\ \overset{0}{\forall} x \in (0,l),\ \mu_2 = const > 0; \tag{2.7}$$

$$|a_1(x,z)| \le \mu_3, \left|\frac{\partial a_1(x,z)}{\partial x}\right| \le \mu_4, \left|\frac{\partial a_1(x,z)}{\partial z}\right| \le \mu_5, \overset{0}{\forall}(x,z) \in \Omega,$$

$$a(0,z) = a(l,z) = 0, \mu_3, \mu_4, \mu_5 = const > 0; \tag{2.8}$$

$$\mu_6 \le a(x) \le \mu_7,\ \overset{0}{\forall} x \in (0,l),\ \mu_6, \mu_7 = const > 0; \tag{2.9}$$

$\varphi(x), f(x,z), y_0(z), y_1(z)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0,l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0, f \in W_2^{0,1}(\Omega), y_0, y_1 \in L_2(0,L); \tag{2.10}$$

$\omega \in H$ - заданный элемент , $H \equiv W_2^1(0,L) \times W_2^1(0,L)$ и символ $\overset{0}{\forall}$ означает " при почти всех".

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v)$ из условий (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ будем называть редуцированной задачей. Ясно, что редуцированная задача является второй начально-краевой задач для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым.

Определене 2.1. При каждом $v \in V$ под решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) будем понимать функцию $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v)$ из прстранства $B_1 \equiv C^0([0,L], W_2^2(0,l)) \cap C^1([0,L], L_2(0,l))$, удовлетворяющую уравнению (2.2) для почти всех $x \in (0,l)$ и любого $z \in [0,L]$, а начальным условиям (2.3) для почти всех $x \in (0,l)$ и краевым условиям (2.4) для почти всех $z \in (0,L)$.

Использу методику работ $[21-25]$ устанавливаем справедливость утверждения:

Теорема 2.1. Пусть комплексное число a_2 удовлетворяет условиям (2.5), а функции $a_0(x)$, $a_1(x,z), a(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,z)$ удовлетворяют условиям (2.6)-(2.10). Тогда редуцированная задача (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства B_1 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(\cdot,z)\|^2_{W_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi(\cdot,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_0\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \forall z \in [0,L],$$

(2.11)

где $c_0 > 0$ не зависит от z.

Из вложения, $B_1 \subset C^0([0,l], L_2(0,L))$ следует, что функционал (2.1) имеет смысл.

3. Существование и единственность решения задачи оптимального управления

В этом параграфе будем изучить вопрос существования и единственности решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4). Поэтому сначала будем установить результат о существовании единственного решения этих задач.

Теорема 3.1. Пусть комплексное число a_2 и функции $a_0(x), a_1(x,z)$ $a(x)$, $\varphi(x), f(x,z), y_0(z), y_1(z)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.10). Пусть, кроме того, $\omega \in H = W_2^1(0,L)\times W_2^1(0,L)$-заданный элемент. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет единственное решение.

Доказательство опирается на следующее утверждение из невыпуклой оптимизации, указанное в работе [26] в следующей формулировке : если функционал $I_0(v)$ полунепрерывен снизу и снизу ограничен на замкнутом ограниченном множестве U равномерно выпуклого пространства X, тогда существует всюду плотное подмножество G этого пространства, что для любого $\omega \in G$ и $\alpha > 0$ функционал $I_\alpha(v) = I_0(v) + \alpha\|v-\omega\|_X^2$ достигает наименьшее значение на единственном элементе множества U.

Сперва докажем непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. При принятых условиях функционал $J_0(v)$ примет вид:

$$J_0(v) = \beta_0\|\psi(0,.)-y_0\|_{L_2(0,L)}^2 + \beta_1\|\psi(l,.)-y_1\|_{L_2(0,L)}^2. \tag{3.1}$$

Пусть $\delta v \in B = W_\infty^1(0,L)\times W_\infty^1(0,L)$- приращение любого элемента $v\in V$ такое, что $v+\delta v \in V$ и $\delta\psi = \delta\psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v+\delta v) - \psi(x,z;v)$, где $\psi(x,z;v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v \in V$. Из условий (2.2)-(2.4) следует, что функция $\delta\psi = \delta\psi(x,z)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} i\frac{\partial\delta\psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right) + ia_1(x,z)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x} - a(x)\delta\psi + (v_0(z)+\delta v_0(z))\delta\psi + \\ +i(v_1(z)+\delta v_1(z))\delta\psi + a_2\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)\delta\psi + a_2\psi_\delta\psi\delta\bar\psi = \\ = -\delta v_0(z)\psi(x,z) - i\delta v_1(z)\psi(x,z), (x,z)\in\Omega, \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\delta\psi(x,0)=0,\ x\in(0,l),\ \frac{\partial\delta\psi(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial\delta\psi(l,z)}{\partial x} = 0,\ z\in(0,L), \tag{3.3}$$

где $\psi_\delta = \psi_\delta(x,z) \equiv \psi(x,z;v+\delta v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v+\delta v \in V$, $\delta v \in B$.

Установим оценку для решения начально-краевой задачи (3.2), (3.3) . С этой целью обе части уравнения (3.2) умножим на функцию $\delta\bar\psi(x,z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_z. Тогда, используя формулу интегрирования по частям и граничные условия из (3.3), получим равенство,

$$\begin{gathered} \int_{\Omega_z}\left(i\frac{\partial\delta\psi}{\partial z}\delta\bar\psi - a_0(x)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 + ia_1(x,\tau)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\delta\bar\psi - a(x)|\delta\psi|^2 + \right. \\ +(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau))|\delta\psi|^2 + i(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau))|\delta\psi|^2 + \\ \left. +a_2\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)|\delta\psi|^2 + a_2\psi_\delta\psi(\delta\bar\psi)^2\right)dxd\tau = \\ = -\int_{\Omega_z}\delta v_0(\tau)\psi\delta\bar\psi dxd\tau - i\int_{\Omega_z}\delta v_1(\tau)\psi\delta\bar\psi dxd\tau, \forall z\in[0,L]. \end{gathered}$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и прибавляя к обеим частьям этого равенства слагаемое $\int\limits_{\Omega_z} \frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}|\delta\psi|^2 dxd\tau$ получим равенство, из которого в силу условия для $a_1(x,z)$ и начального условия следует справедливость неравенства:

$$\int_0^l |\delta\psi(x,z)|^2 dx + 2\operatorname{Im} a_2 \int\limits_{\Omega_z} \left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau \le 2b_1 \int\limits_{\Omega_z} |\delta\psi|^2 dxd\tau +$$
$$+2|a_2| \int\limits_{\Omega_z} |\psi_\delta||\psi||\delta\psi|^2 dxd\tau + 2\int\limits_{\Omega_z} |\delta v_0(\tau)||\psi||\delta\psi| dxd\tau +$$
$$+2\int\limits_{\Omega_z} |\delta v_1(\tau)||\psi||\delta\psi| dxd\tau + \int\limits_{\Omega_z} \left|\frac{\partial a_1(x,\tau)}{\partial x}\right| |\delta\psi|^2 dxd\tau, \forall z \in [0,L].$$

В этом неравенстве используя неравенство $2|\psi_\delta||\psi| \le |\psi_\delta|^2 + |\psi|^2$ и условия для комплексного числа a_2, а также условие для функции $a_1(x,z)$ получим неравенство:

$$\int_0^l |\delta\psi(x,z)|^2 dx + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_2 \int\limits_{\Omega_z} \left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau \le (2b_1 + \mu_4) \int\limits_{\Omega_z} |\delta\psi|^2 dxd\tau +$$
$$+2\int\limits_{\Omega_z} |\delta v_0(\tau)||\psi||\delta\psi| dxd\tau + 2\int\limits_{\Omega_z} |\delta v_1(\tau)||\psi||\delta\psi| dxd\tau, \forall z \in [0,L].$$

Из этого неравенства с применением неравенства Коши-Буняковского и оценки оценки (2.11) получим справедливость неравенства:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_2 \int\limits_{\Omega_z} \left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau \le$$
$$\le (2b_1 + \mu_4 + 2) \int\limits_{\Omega_z} |\delta\psi|^2 dxd\tau + c_1\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,L)} + \|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,L)}\right), \forall z \in [0,L]. \tag{3.4}$$

Из этого неравенства с помощью леммы Гроноулла получим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_2\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,L)} + \|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,L)}\right), \forall z \in [0,L]. \tag{3.5}$$

Здесь постоянная $c_2 > 0$ не зависит от δv. Учитывая эту оценку в неравенстве (3.4) оттуда получим справедливость следующей оценки:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{1}{2}\operatorname{Im} a_2 \int\limits_{\Omega_z} \left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2 dxd\tau \le$$
$$\le c_3\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,L)} + \|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,L)}\right), \forall z \in [0,L]. \tag{3.6}$$

Здесь постоянная $c_3 > 0$ не зависит от δv.

Теперь оценим $\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}$. С этой целью обе части уравнения (3.2) на функцию $\Lambda\delta\bar\psi = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\bar\psi}{\partial x}\right) + a(x)\delta\bar\psi$ и проинтегрируемпо области Ω_z. Тогда используя формулу для $\Lambda\delta\bar\psi$ и формулу интегрирования по частям имеем:

$$\int\limits_{\Omega_z} i\frac{\partial\delta\psi}{\partial z}\Lambda\delta\bar\psi dxd\tau - \int\limits_{\Omega_z} |\Lambda\delta\psi|^2 dxd\tau - i\int\limits_{\Omega_z} a_1(x,\tau)a_0(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\bar\psi}{\partial x^2} dxd\tau +$$

$$-i\int_{\Omega_z} a_1(x,\tau)\left|\frac{da_0(x)}{dx}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_z} a_1(x,\tau)a(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\delta\overline{\psi}dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_z} a_0(x)\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_z} a_0(x)\left(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau)\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_z}\left(v_0(\tau)+\delta v_0(\tau)\right)a(x)\left|\delta\psi\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_z}\left(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau)\right)a(x)\left|\delta\psi\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\left|\psi_\delta\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\delta\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau + \int_{\Omega_z} a_2 a(x)\left(\left|\psi_\delta\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left|\delta\psi\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_\delta\psi\delta\overline{\psi}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau + \int_{\Omega_z} a_2 a(x)\psi_\delta\psi\left(\delta\overline{\psi}\right)^2 dxd\tau =$$

$$= -\int_{\Omega_z}\delta v_0(\tau)a_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau - i\int_{\Omega_z}\delta v_1(\tau)a_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau -$$

$$-\int_{\Omega_z} a(x)\delta v_0(\tau)\psi\delta\overline{\psi}dxd\tau - i\int_{\Omega_z} a(x)\delta v_1(\tau)\psi\delta\overline{\psi}dxd\tau, \forall z\in[0,L]. \qquad (3.7)$$

Ясно, что имеют место равенства:

$$\int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\left|\psi_\delta\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\delta\psi\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau = \int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\left(\left|\psi_\delta\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\left(\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\overline{\psi}_\delta + \frac{\partial\overline{\psi}_\delta}{\partial x}\psi_\delta + \frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\psi} + \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\psi\right)\delta\psi\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau, \forall z\in[0,L], \qquad (3.8)$$

$$\int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_\delta\psi\delta\overline{\psi}\right)\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau = \int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\psi_\delta\psi\left(\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_z} a_2 a_0(x)\left(\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\psi + \psi_\delta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta\overline{\psi}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}dxd\tau, \forall z\in[0,L]. \qquad (3.9)$$

Если учесть эти равенства в (3.7), то оттуда получим равенство, из которого вычитывая его комплексное сопряжение получим справедливость следующего равенства:

$$\int_{\Omega_z} i\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial z}\Lambda\delta\overline{\psi} + \frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial z}\Lambda\delta\psi\right)dxd\tau - i\int_{\Omega_z} a_1(x,\tau)a_0(x)\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}\right)dxd\tau -$$

$$-2i\int_{\Omega_z} a_1(x,\tau)\left|\frac{da_0(x)}{dx}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + i\int_{\Omega_z} a_1(x,\tau)a(x)\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\delta\overline{\psi} + \frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\delta\psi\right)dxd\tau +$$

$$+2i\int_{\Omega_z} a_0(x)\left(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau)\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau + 2i\int_{\Omega_z}\left(v_1(\tau)+\delta v_1(\tau)\right)a(x)\left|\delta\psi\right|^2 dxd\tau +$$

$$+i2\operatorname{Im} a_2\int_{\Omega_z} a_0(x)\left(\left|\psi_\delta\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2 dxd\tau +$$

$$+2i\int_{\Omega_z}\operatorname{Im}\left(a_2 a_0(x)\left(\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\overline{\psi}_\delta + \frac{\partial\overline{\psi}_\delta}{\partial x}\psi_\delta + \frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\psi} + \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\psi\right)\delta\psi\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau +$$

$$+i2\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_z}a(x)\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)|\delta\psi|^2dxd\tau+2i\int_{\Omega_z}\operatorname{Im}\left(a_2a_0(x)\psi_\delta\psi\left(\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)^2\right)dxd\tau+$$

$$+2i\int_{\Omega_z}\operatorname{Im}\left(a_2a_0(x)\left(\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\psi+\psi_\delta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta\overline{\psi}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau+$$

$$+2i\int_{\Omega_z}\operatorname{Im}\left(a_2a(x)\psi_\delta\psi(\delta\overline{\psi})^2\right)dxd\tau=$$

$$=-2i\int_{\Omega_z}\delta v_0(\tau)a_0(x)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau-2i\int_{\Omega_z}\delta v_1(\tau)a_0(x)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\right)dxd\tau-$$

$$-2i\int_{\Omega_z}a(x)\delta v_0(\tau)\operatorname{Im}(\psi\delta\overline{\psi})dxd\tau-2i\int_{\Omega_z}a(x)\delta v_1(\tau)\operatorname{Re}(\psi\delta\overline{\psi})dxd\tau,\forall z\in[0,L].\quad(3.10)$$

Преобразуя первое слагаемое левой части этого равенства и учитывая начальное условие из (3.3) и условие, что $\frac{\partial\delta\overset{0}{\psi}(x,0)}{\partial x}=0,\forall x\in(0,l)$ получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega_z}\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial z}\Lambda\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial z}\Lambda\delta\psi\right)dxd\tau=$$

$$=\int_0^l a_0(x)\left|\frac{\partial\delta\psi(x,z)}{\partial x}\right|^2dx+\int_0^l a(x)|\delta\psi(x,z)|^2dx,\forall z\in[0,L].\quad(3.11)$$

С другой стороны второе слагаемое левой части равенства (3.10) можем написать в виде:

$$i\int_{\Omega_z}a_1(x,\tau)a_0(x)\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial x}\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}\right)dxd\tau=i\int_{\Omega_z}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)a_0(x)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau-$$

$$-i\int_{\Omega_z}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,\tau)a_0(x)\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau,\forall z\in[0,L].\quad(3.12)$$

Учитывая это равенство и равенство (3.11) в левой части равенства (3.10) получим справедливость равенства, из которого с учетем условий на коэффициенты уравнения устанавливаем справедливость неравенства:

$$\mu_0\int_0^l\left|\frac{\partial\delta\psi(x,z)}{\partial x}\right|^2dx+\mu_6\int_0^l|\delta\psi(x,z)|^2dx+2\mu_0\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_z}\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\mu_6\operatorname{Im}a_2\int_{\Omega_z}\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)|\delta\psi|^2dxd\tau\le\left(\mu_4\mu_1+3\mu_3\mu_2+2\mu_1b_1\right)\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\mu_3\mu_7\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right||\delta\psi|dxd\tau+2\mu_7b_1\int_{\Omega_z}|\delta\psi|^2dxd\tau+$$

$$+4\mu_1|a_2|\int_{\Omega_z}\left(\left|\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\right||\psi_\delta|+\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right||\psi|\right)|\delta\psi|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|dxd\tau+2\mu_1|a_2|\int_{\Omega_z}|\psi_\delta||\psi|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2dxd\tau+$$

$$+2\mu_1|a_2|\int_{\Omega_z}\left(\left|\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\right||\psi|+|\psi_\delta|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\right)|\delta\psi|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|dxd\tau+2\mu_7|a_2|\int_{\Omega_z}|\psi_\delta||\psi||\delta\psi|^2dxd\tau+$$

$$+2\mu_1\int_{\Omega_z}\left|\delta v_0(\tau)\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|dxd\tau+2\mu_1\int_{\Omega_z}\left|\delta v_1(\tau)\right|\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|dxd\tau+$$

$$+2\mu_7\int_{\Omega_z}\left|\delta v_0(\tau)\right|\left|\psi\right|\left|\delta\psi\right|dxd\tau+2\mu_7\int_{\Omega_z}\left|\delta v_1(\tau)\right|\left|\psi\right|\left|\delta\psi\right|dxd\tau,\forall z\in[0,L]. \quad (3.13)$$

Ввиду того, что пространство $W_2^2(0,l)$ вложено в пространствам $W_\infty^1(0,l),L_\infty(0,l)$ в силу оценки (2.11) можем установить справедливость неравенств:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_4,\|\psi_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_4, \quad (3.14)$$

$$\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_5,\left\|\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x}\right\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_5. \quad (3.15)$$

С учетем этих неравенств и оценки (3.6) из неравенства (3.13) с применением неравенства Коши-Буняковского и леммы Гронуолла имеем:

$$\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_8\left(\|\delta v_0\|^2_{L_\infty(0,L)}+\|\delta v_1\|^2_{L_\infty(0,L)}\right),\ \forall z\in[0,L]. \quad (3.16)$$

Используя эту оценку и оценку (3.6) установим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,z)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_9\|\delta v\|^2_B,\forall z\in[0,L]. \quad (3.17)$$

Интегрируя обе части этого неравенства по $z\in[0,L]$ имеем:

$$\|\delta\psi\|^2_{W_2^{1,0}(\Omega)}\le c_{10}\|\delta v\|^2_B. \quad (3.18)$$

С помощью теоремы о следах (см. $[27]$, стр. 170) получим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,L)}+\|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,L)}\le c_{11}\|\delta v\|^2_B. \quad (3.19)$$

Здесь $c_{11}>0$ не зависит от δv.

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v\in V$. С помощью формулы (3.1) имеем:

$$\delta J_0(v)=J_0(v+\delta v)-J_0(v)=\ 2\beta_0\int_0^L\mathrm{Re}\left[(\psi(0,z)-y_0(z))\delta\bar\psi(0,z)\right]dz+$$

$$+2\beta_1\int_0^L\mathrm{Re}\left[(\psi(l,z)-y_1(z))\delta\bar\psi(l,z)\right]dz+\beta_0\|\delta\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,L)}+\beta_1\|\delta\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,L)}. \quad (3.20)$$

Используя оценку (2.11) нетрудно установить справедливость оценки:

$$\|\psi(0,.)\|^2_{L_2(0,L)}+\|\psi(l,.)\|^2_{L_2(0,L)}\le c_{12}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right). \quad (3.21)$$

Из формулы (3.20) применяя неравенство Коши-Буняковского и используя оценки (3.19), (3.21) получим справедливость неравенства:

$$|\delta J_0(v)|\le c_{13}\left(\|\delta v\|_B+\|\delta v\|^2_B\right),\forall v\in V. \quad (3.22)$$

Из этого неравенства следует непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Множество V является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством пространства $B=W_\infty^1(0,L)\times W_\infty^1(0,L)$. Нетрудно доказать, что оно является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством равномерного выпуклого пространства

$H=W_2^1(0,L)\times W_2^1(0,L)$ $[28]$. Тогда в силу сформулированного выше утверждения невыпуклой оптимизаци из работы $[26]$ существует плотное подмножество G из пространства H такое, что при любом $\omega\in G$ и при любом $\alpha>0$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет единственное решение. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда при любом $\alpha\ge 0$ и любом $\omega\in H$ задача оптимального управления (2.1)-(2.4) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Возьмем любую минимизирующую последовательность $\{v^k\}\subset V$: $\lim\limits_{k\to\infty}J_\alpha(v^k)=J_{\alpha*}=\inf\limits_{v\in V}J_\alpha(v)$.Положим $\psi_k=\psi_k(x,z)\equiv\psi(x,z;v^k)$, $k=1,2,...$. В силу теоремы 3.1 при каждом $v^k\in V$ редуцированная задача (2.2)-(2.4) имеет единственное решение $\psi_k(x,z)$ из пространства B_1 и для этого решения верна оценка:

$$\|\psi_k(\cdot,z)\|^2_{W_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi_k(\cdot,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_0\left(\|\varphi\|^2_{W_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right),k=1,2,... \tag{3.23}$$

для $\forall z\in[0,L]$, где правая часть оценки не зависит от k.

Поскольку множество V есть ограниченное множество банахова пространства $B=W_\infty^1(0,L)\times W_\infty^1(0,L)$, то из последовательности $\{v^k\}\subset V$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{v^{k_p}\}$, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{v^k\}$, что

$$v_m^k\to v_m, m=0,1 \text{ (*) слабо в } L_\infty(0,L), \tag{3.24}$$

$$\frac{dv_m^k}{dz}\to\frac{dv_m}{dz}, m=0,1 \text{ (*) слабо в } L_\infty(0,L) \tag{3.25}$$

при $k\to\infty$. Кроме того, V является замкнутым выпуклым множеством из B. Поэтому V есть (*) слабо замкнутое множество, то есть $v\in V$. Кроме того, пространство $B=W_\infty^1(0,L)\times W_\infty^1(0,L)$ компактно вложено в пространство $C[0,L]\times C[0,L]$. Тогда ясно, что имеет место следующие предельные соотношения:

$$v_m^k\to v_m, m=0,1 \text{ сильно в } C[0,L] \text{ при } k\to\infty. \tag{3.26}$$

Другими словами, последовательности $\{v_m^k(z)\}, m=0,1$ сходятся равномерно по $z\in[0,L]$ к функциям $v_m(z), m=0,1$.

Из оценки (3.23) следует, что последовательность $\{\psi_k(x,t)\}$ равномерно ограничена в норме пространства B_1 . Тогда из этой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность $\{\psi_{k_p}(x,t)\}$,которую для простоты изложения снова обозначим через $\{\psi_k(x,t)\}$, что

$$\psi_k(\cdot,t)\to\psi(\cdot,t) \text{ слабо в } W_2^2(0,l); \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial\psi_k(\cdot,t)}{\partial t}\to\frac{\partial\psi(\cdot,t)}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(0,l) \tag{3.28}$$

для каждого $t\in[0,T]$при $k\to\infty$.

Ясно, что каждый элемент $\{\psi_k(x,t)\}$ из B_1 удовлетворяет тождеству:

$$\int_0^l \left(i\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial x} \right) + ia_1(x,z)\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial x} - a(x)\psi_k(x,z) + v_0^k(z)\psi_k(x,z) + \right.$$

$$\left. + iv_1^k(z)\psi_k(x,z) + a_2|\psi_k(x,z)|^2\psi_k(x,z) - f(x,t) \right)\bar{\eta}(x)dx, \forall z\in[0,T], k=1,2,... \quad (3.29)$$

для любой функции $\eta=\eta(x)$ из $L_2(0,l)$, начальному условию:

$$\psi_k(x,0)=\varphi(x),\ \overset{0}{\forall} x\in(0,l), k=1,2,... \quad (3.30)$$

и краевому условиям:

$$\frac{\partial\psi_k(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial\psi_k(l,z)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} z\in(0,L), k=1,2,... . \quad (3.31)$$

В силу компактности вложения пространства B_1 в $C^0([0,L],L_2(0,l))$ и силу предельных соотношений (3.27), (3.28) имеем:

$$\|\psi_k(\cdot,z)-\psi(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)} \to 0 , \quad (3.32)$$

равномерно относительно $z\in[0,L]$ при $k\to\infty$. Используя это и предельные соотношения (3.26) можем установить справедливость соотношений:

$$\int_0^l v_m^k(z)\psi_k(x,z)\bar{\eta}(x)dx \to \int_0^l v_m(z)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx, m=0,1, \quad (3.33)$$

$$\int_0^l a_2|\psi_k(x,z)|^2\psi_k(x,z)\bar{\eta}(x)dx \to \int_0^l a_2|\psi(x,z)|^2\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx \quad (3.34)$$

для каждого $z\in[0,L]$ и для любой а функции $\eta\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$. Действительно, можем написать следующие равенства:

$$\int_0^l v_m^k(z)\psi_k(x,z)\bar{\eta}(x)dx = \int_0^l v_m^k(z)(\psi_k(x,z)-\psi(x,z))\bar{\eta}(x)dx +$$

$$+\int_0^l (v_m^k(z)-v_m(z))\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx + \int_0^l v_m(z)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx, m=0,1. \quad (3.35)$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое правой части этого равенства:

$$\left|\int_0^l v_m^k(z)(\psi_k(x,z)-\psi(x,z))\bar{\eta}(x)dx\right| \le |v_m^k(z)|\int_0^l |\psi_k(x,z)-\psi(x,z)||\eta(x)|dx \le$$

$$\le |v_m^k(z)|\|\eta\|_{L_2(0,l)}\|\psi_k(.,z)-\psi(.,z)\|_{L_2(0,l)}, \forall z\in[0,L], \forall\eta\in L_2(0,l). \quad (3.36)$$

Ввиду того, что пространство $B=W_\infty^1(0,L)\times W_\infty^1(0,L)$ вложено в пространство $C[0,L]\times C[0,L]$ и для элементов подпоследовательности $\{v_m^k(z)\}, m=0,1$ справедливы неравенства:

$$|v_m^k(z)|\le b_m, \left|\frac{dv_m^k(z)}{dz}\right| \le d_m, m=0,1, \overset{0}{\forall} z\in(0,L) \quad (3.37)$$

можем написать следующие неравенства:

$$|v_m^k(z)| \le c_{42}\|v_m^k\|_{W_2^1(0,L)} \le c_{13}\sqrt{L}\left(\sqrt{b_m}+\sqrt{d_m}\right) = c_{14}, \forall z\in[0,L], m=0,1, k=1,2,... . \quad (3.38)$$

Здесь $c_{14}>0$ постоянная не зависит от k. С учетом этого из неравенства (3.36) для $\forall\eta\in L_2(0,l)$ получим следующие неравенства:

$$\left|\int_0^l v_m^k(z)\left(\psi_k(x,z)-\psi(x,z)\right)\bar{\eta}(x)dx\right| \le c_{14}\|\eta\|_{L_2(0,l)}\|\psi_k(.,z)-\psi(.,z)\|_{L_2(0,l)}, \forall z\in[0,L], m=0,1.$$

С учетем предельного соотношения (3.32) если переходить к пределу в обоих частьях этих неравенств при $k\to\infty$ получим справедливость предельных соотношений:

$$\int_0^l v_m^k(z)\left(\psi_k(x,z)-\psi(x,z)\right)\bar{\eta}(x)dx\to 0, m=0,1, \forall\eta\in L_2(0,l) \tag{3.39}$$

для любого $z\in[0,L]$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое правой части равенства (3.33). Для этого слагаемого можем написать следующие нераенства:

$$\left|\int_0^l \left(v_m^k(z)-v_m(z)\right)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx\right| \le \left|v_m^k(z)-v_m(z)\right|\int_0^l\left|\psi(x,z)\bar{\eta}(x)\right|dx \le$$

$$\le\left|v_m^k(z)-v_m(z)\right|\|\psi(.,z)\|_{L_2(0,l)}\|\eta\|_{L_2(0,l)}, \forall z\in[0,L], m=0,1, k=1,2,\dots\ ,\ \forall\eta\in L_2(0,l)\ .$$

В силу оценки (2.11) и условия $\eta\in L_2(0,l)$ из этого нервенства получим:

$$\left|\int_0^l \left(v_m^k(z)-v_m(z)\right)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx\right| \le c_{15}\left|v_m^k(z)-v_m(z)\right|, \forall z\in[0,l] m=0,1, k=1,2,\dots, \ \forall\eta\in L_2(0,l).$$

Здесь $c_{15}>0$ постоянная не зависит от k. С учетем предельных соотношений если переходить к пределу в обеих частьях этих неравенств, то получим справедливость следующих предельных соотношений:

$$\int_0^l \left(v_m^k(z)-v_m(z)\right)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx\to 0, m=0,1, \forall\eta\in L_2(0,l) \text{ при } k\to\infty\ . \tag{3.40}$$

Таким образом, используя предельные соотношения (3.39), (3.40) если переходить к пределу в обеих частьях равенств (3.35), то оттуда получим справедливость предельных соотношений (3.33).

Теперь установим справедливость предельного соотношения (3.34). С этой целью рассмотрим следующую разность:

$$\int_0^l a_2\left|\psi_k(x,z)\right|^2\psi_k(x,z)\bar{\eta}(x)dx-\int_0^l a_2\left|\psi(x,z)\right|^2\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx\,.$$

Эту разность можем оценить следующим образом:

$$\left|\int_0^l a_2\left|\psi_k(x,z)\right|^2\psi_k(x,z)\bar{\eta}(x)dx-\int_0^l a_2\left|\psi(x,z)\right|^2\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx\right|\le$$

$$\le|a_2|\int_0^l\left|\left|\psi_k(x,z)\right|^2\psi_k(x,z)-\left|\psi(x,z)\right|^2\psi(x,z)\right|\left|\eta(x)\right|dx\le$$

$$\le\frac{3}{2}|a_2|\int_0^l\left(\left|\psi_k(x,z)\right|^2+\left|\psi(x,z)\right|^2\right)\left|\psi_k(x,z)-\psi(x,z)\right|\left|\eta(x)\right|dx, \forall z\in[0,L], k=1,2,\dots\ . \tag{3.41}$$

В силу оценок (2.11) , (3.23) и вложения пространства $W_2^2(0,l)$ в пространство $L_\infty(0,l)$ можем установить справедливость неравенств:

$$\|\psi(.,z)\|_{L_\infty(0,l)}\le c_{16}, \|\psi_k(.,z)\|_{L_\infty(0,l)}\le c_{16}, \forall z\in[0,l], k=1,2,\dots\ \ . \tag{3.42}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского из (3.41) имеем:

$$\left|\int_0^l a_2\left|\psi_k(x,z)\right|^2\psi_k(x,z)\bar{\eta}(x)dx-\int_0^l a_2\left|\psi(x,z)\right|^2\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx\right|\le$$

$$\le 3c_{16}^2|a_2|\|\eta\|_{L_2(0,l)}\|\psi_k(.,z)-\psi(.,z)\|_{L_2(0,l)}, \forall z\in[0,L], \forall\eta\in L_2(0,l)$$

для $k=1,2,...$. С учетем предельного сотношения (3.32) если переходить к пределу в обеих частьях этого неравенства, то при $k\to\infty$ получим справедливость предельного соотношения (3.34). Тогда, используя предельные соотношения (3.27), (3.28), (3.33), (3.34) если переходить к пределу в интегральном тождестве (3.291), то при $k\to\infty$ получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_0^l \left(i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right)+ia_1(x,z)\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}-a(x)\psi(x,z)+v_0(z)\psi(x,z)+\right.$$
$$\left.+iv_1(z)\psi(x,z)+a_2\left|\psi(x,z)\right|^2\psi(x,z)-f(x,z)\right)\bar{\eta}(x)dx$$

для каждого $z\in[0,L]$ и для любой функции $\eta=\eta(x)$ из $L_2(0,l)$. Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,z)$ для каждого $z\in[0,L]$ и для почти всех $x\in(0,l)$ удовлетворяет уравнению (2.2).

Удовлетворение начального условия следует из предельного соотношения (3.32) при $z=0$, начального условия (3.30) и из следующего неравенства:

$$\left\|\psi(\cdot,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}\le\left\|\psi(\cdot,0)-\psi_k(\cdot,0)\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|\psi_k(\cdot,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}.$$

Действительно, если с учетем предельного соотношения (3.32) при $z=0$ и условия (3.30) если переходить к пределу в обеих частьях этого неравенства, то при $k\to\infty$ получим справедливость соотношения:

$$\left\|\psi(\cdot,0)-\varphi\right\|_{L_2(0,l)}=0.$$

Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,z)$ начальному условию (2.3) для почти всех $x\in(0,l)$.

Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x,z)$ удовлетворяет вторым краевым условиям (2.4). Действительно, в силу леммы 3.4 работы $[21,c.98]$ и условия, что подпоследовательность $\{\psi_k(x,z)\}$ принадлежит пространству $B_1\subset W_2^{2,1}(\Omega)$ можем утверждать справедливость предельных соотношений:

$$\frac{\partial\psi_k(s,z)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi(s,z)}{\partial x}, s=0,l \text{ слабо в } L_2(0,L) \qquad (3.43)$$

при $k\to\infty$. Тогда, используя эти пределные соотношения и краевые условия (3.31), из равенств:

$$\int_0^L\frac{\partial\psi(s,z)}{\partial x}\bar{\eta}(z)dz=\int_0^L\left(\frac{\partial\psi(s,z)}{\partial x}-\frac{\partial\psi_k(s,z)}{\partial x}\right)\bar{\eta}(z)dz+\int_0^L\frac{\partial\psi_k(s,z)}{\partial x}\bar{\eta}(z)dz, s=0,l$$

с переходом к пределу получим справедливость краевых условий:

$$\frac{\partial\psi(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial\psi(l,z)}{\partial x}=0,\forall\overset{0}{z}\in(0,L).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x,t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4), соответствующим предельной функции $v\in V$, то есть $\psi=\psi(x,z)\equiv\psi(x,z;v)$. Кроме того, для этой функции справедлива оценка (2.11), которая непосредственно следует из оценки (3.23) с переходом к пределу по слабо сходящиеся подпоследовательности $\{\psi_k(x,z)\}$. В силу теоремы 2.1 такое решение единственно принадлежит пространству B_1. Используя слабую полунепрерывность снизу нормы пространств $L_2(0,L),H$, а также предельные соотношения: $v_m^k\to v_m, m=0,1$

слабо в $W_2^1(0,L)$, $\psi_k(s,.)\to\psi(s,.), s=0,l$ сильно в $L_2(0,L)$ при $k\to\infty$ для $\forall\alpha\geq 0$ и $\forall\omega\in H$ имеем:

$$J_{\alpha^*}\leq J_\alpha(v)\leq \underline{\lim}_{k\to\infty} J_\alpha(v^k)=\inf_{v\in V_0} J_\alpha(v)=J_{\alpha^*}\,.$$

Отсюда следует, что $v\in V$ является решением задачи оптимального управления (2.1)-(2.4) при $\alpha\geq 0$ и $\forall\omega\in H$. Теорема 3.2 доказана.

Литература

1. Бутковский, А.Г. (1984) Самойленко Ю.И.Управление квантовомеханическими процессами. М : Наука, 256 с.
2. Воронцов, М.А. (1985) Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М: Наука, 366 с.
3. Журавлев, В.М. (2001) Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией. Ульяновск, УлГУ, 200 с.
4. Akbaba, G.D. (2011) The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient. Master's thesis, Kars, 71 pp. (in Turkish).
5. Yagubov, G. (2012) Toyoğlu F., Subaşı M. An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation // Applied Mathematics and Computation,vol. 218, iss.11, pp.6177-6187.
6. Искендеров, А.Д. (1988) Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // Докл. АН СССР, т. 303, № 5, с. 1044-1048.
7. Искендеров, А.Д. Ягубов, Г.Я. (1989) Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // Автоматика и телемехан., № 12, с. 27-38.
8. Ягубов, Г.Я. Мусаева, М.А. (1997) Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения, т.33, № 12, с. 1691-1698.
9. Baudouin, L. Kavian, O. Puel, J.P. (2005) Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. DifferentialEquations, 216, p. 188-222.
10. Искендеров, А. Ягубов, Г. (2007) Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, Ленкорань, с. 3-56.
11. Искендеров, А.Д. Ягубов, Г.Я. Мусаева, М.А. (2012) Идентификация квантовых потенциалов. Баку, Чашыоглу, 548 с.
12. Ibragimov, N.S. (2010) On the existence of a solution to the identification problem based on the final observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation. Nauchnye Trudy, Azerb. Tech. Univ., Ser. Fundamental Sciences, No.2, pp.75-83. (in Russian)

13. Ibragimov, N.S. (2011) On one identification problem for a one-dimensional nonlinear stationary quasi-optic equation. Tavricheskiy Vestnik Informatiki i Matematiki, No.2, pp.17-29. (in Russian).

14. Ibragimov, N.S. (2012) The identification problem based on the final . observation for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. Problems of Control and Informatics, No.4, pp.15-27. (in Russian).

15. Paşayev, A.M. İskenderov, A.D. Yagubov, G.Y. Musaeva M.A. (2020) Variation method solving of the inverse problems for Schrödinger-type equation // J. Inverse Ill Posed Probl., doi.org/10.1515/jiip-2020-0095, 12 pp.

16. Ягуб, Г. Ибрагимов, Н. Мусаева, М. Зенгин, М. (2017) Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантового потенциала в нелинейном нестационарном уравнении Шредингера с комплексным кожффициентом в нелинейной части // Вестник Ленкоранского Государственного Университета, Естественные науки, серия 2, с. 7-30.

17. Искендеров, А.Д. Ягуб, Г. Салманов, В. Акцой, Н.Й. (2019) Задача оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и техн. наук, № 4 (101), с. 32-44.

18. Ладыженская, О.А. (1973) Краевые задачи математической физики. М: Наука, 408 с.

19. Ладыженская, О.А. (1967) Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные иквазилинейные уравнения параболического типа. М: Наука, 736 с.

20. Lions, J.-L. Magenes, E. (1972) Non-homogeneous boundary value problems and applications - vol. 2. Berlin, 307 p.

21. Ibragimov, N.S. (2010) Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences, No.3, pp.72-84. (in Russian).

22. Ibragimov, N.S. (2010) Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics", Vol.1, No.29, pp.61-70. (in Russian).

23. Ягубов, Г. Салманов, В. Ягубов, В. Зенгин, М. (2017) Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4 (85), с. 7-21.

24. Yagub, G. İbrahimov, N.S. and Zengin, M. (2018) The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, № 2, pp. 214-232.

25. Искендеров, А. Ягуб, Г. Салманов, В. (2018) Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4(93), с. 28-43.
26. Goebel, M. (1979) On existence of optimal control // Math. Nachr., vol. 93,p. 67-73.
27. Михайлов, В.П. (1983) Дифференциальные уравнения с частными производными. М.: Наука, 424 с.
28. Иосида, К. (1967) Функциональный анализ. М.: Мир, 624 с.

XÜSUSİ QRADİENT CƏMLİ QEYRİ-XƏTTİ STASİONAR KVAZİOPTİKA TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD FUNKSİONALI İLƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ

Merve Zengin
Natiq İbrahimov
Qabil Yaqub

Kafkas Universiteti, Kars, Türkiyə
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan
Kafkas Universiteti, Kars, Türkiyə

Verilən işdə xüsusi qradient cəmli qeyri-xətti stasionar birölçülü kvazioptika tənliyi üçün keyfiyyətin ölçüsü sərhəd oblstı üzrə inteqrallandığı və idarəetmənin rolu mühitin kəsişmə və birləşmə əmsalları olduğu halda optimal idarəolunan məsələyə baxılır. Bununla da baxılan optimal idarəolunan məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi teoremləri isbat edilir.

Açar sözlər: kvazioptika tənliyi, optimal idarəolunma məsələsi, qradient cəmləri, kəsişmə və birləşmə əmsalları

EXİSTENCE AND UNİQUENESS OF A SOLUTİON OF THE OPTİMAL CONTROL PROBLEM WİTH BOUNDARY FUNCTİONAL FOR NONLİNEAR STATİONARY QUASİ-OPTİCAL EQUATİON WİTH A SPECİAL GRADİENT TERM

Merve Zengin
Natig Ibragimov
Gabil Yagub
Kafkas University, Kars, Turkey
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan
Kafkas University, Kars, Turkey

In this paper, we consider the optimal control problem for a nonlinear stationary one-dimensional quasi-optical equation with a special gradient term, when the quality criterion is an integral along the border of the area and the role of control is the intersection and junction coefficients of the condition. Herewith are proved the theorems of the existence and uniqueness of a solution of the optimal control problem.

Key words: quasi-optical equation, an optimal control problem, a gradient term, intersection and junction coefficients

Daxil oldu: 1.05.2021; Çapa qəbul edildi: 15.06.2021; Çap edildi: 17.08.2021