LDU
ELMİ XƏBƏRLƏR | Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 1/2023, səh. 34-46

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Габиль Ягуб

Натиг Ибрагимов

Мерве Зенгин

Кафказский университет, Карс, Турция

Лянкаранский государственный университет, Лянкярань, Азербайджан

э-почта: gabilya@mail.ru

э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru

э-почта: merveezengin14@gmail.com

DOI :10.30546/2960-1975.2023.1.34.

Резюме. В данной работе рассматривается задача оптимального управления для нелинейного нестационарного одномерного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом, когда критерий качества является финальным функционалом и роль управления играют измеримые ограниченные коэффициенты уравнения, то есть вещественные и мнимые части комплексного потенциала, зависящие только от временной переменной. При этом сперва доказывается формула для градиента рассматриваемого функционала. Далее устанавливается необходимое условия для решения рассматриваемой задачи оптимального управления в виде вариационного неравенства.

Ключевые слова: Нелинейное уравнение Шредингера, задача оптимального управления, градиентное слагаемое, комплексный потенциал, необходимое условие.

Введение

Задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интересы [1,3]. Известно, что если заряженная частица движется в постоянном однородном магнитном поле, то ее состояние описывается уравнением Шредингера со специальным градиентным слагаемым (см. $[1, стр.182]$). Подобные задачи оптимального управления для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучены, например, в работах [4, 5, 10, 15, 18, 19] и др. Следует отметить, что во всех этих работах в задачах оптимального управления, когда управляющие функции зависят от временной переменной, от управляюших функций потребовались дифференцируемость по времени. Поэтому данная работа, посвященная изучению задачи оптимального управления для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются вещественными и мнимыми частями комплексного потенциала и выбираются из класса измеримых ограниченных функций, зависящих только от временной переменной, представляет немалый научный интерес. Отметим, что подобная задача оптимального управления с интегральным критерием качества по границе области для линейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучена в работе [12].

2. Постановка задачи.

Пусть $l>0$, $T>0$ - заданные числа, $0\le x\le l$, $0\le t\le T$, $\Omega_t\equiv(0,l)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$; $C^k([0,T],B)$- банахово пространство функций, k-раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_p(0,l)$-лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0,l)$ со степенью $p\ge1$; $L_2(0,T;B)$– банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0,T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_\infty(0,T;B)$–банахово пространство измеримых ограниченных на $(0,T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B; Соболевы пространства $W_p^k(0,l)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$ $p\ge1,\ k\ge0,\ m\ge0$, определены, например, в работах [8, 9, 16].

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v)=\left\|\psi(.,T)-y\right\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\left\|v-\omega\right\|^2_H \tag{2.1}$$

на множестве:

$$V=\left\{v=v(t)=\left(v_0(t),v_1(t)\right):\ v_s\in L_2(0,T),\left|v_s(t)\right|\le b_s,s=0,1,\overset{0}{\forall}t\in(0,T)\right\}$$

при условиях:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial\psi}{\partial x}-a(x)\psi+v_0(t)\psi+iv_1(t)\psi+a_2|\psi|^2\psi=f(x,t),(x,t)\in\Omega, \tag{2.2}$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l), \tag{2.3}$$

$$\psi(0,t)=\psi(l,t)=0,t\in(0,T), \tag{2.4}$$

где $i=\sqrt{-1}$; $a_0>0,b_s>0,\ s=0,1,\ \alpha\ge0,$- заданные числа; a_2-комплексное число, удовлетворяющее условиям:

$$a_2=\operatorname{Re}a_2+i\operatorname{Im}a_2,\operatorname{Im}a_2>0,\operatorname{Re}a_2<0,\operatorname{Im}a_2\ge2\left|\operatorname{Re}a_2\right|; \tag{2.5}$$

$a(x),a_1(x,t)$- вещественнозначные измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$0 \le a(x) \le \mu_1, \left|\frac{da(x)}{dx}\right| \le \mu_2, \left|\frac{d^2 a(x)}{dx^2}\right| \le \mu_3, \ \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \ \mu_1, \mu_2, \mu_3 = const > 0; \qquad (2.6)$$

$$|a_1(x,t)| \le \mu_4, \left|\frac{\partial a_1(x,t)}{\partial x}\right| \le \mu_5, \left|\frac{\partial^2 a_1(x,t)}{\partial x^2}\right| \le \mu_6, \overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega, \ \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = const > 0; \qquad (2.7)$$

$\varphi(x), f(x,t), y_0(t), y_1(t)$- комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l), \quad f \in \overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega), \ y \in L_2(0,l); \qquad (2.8)$$

$\omega \in H$ -заданный элемент, $H \equiv L_2(0,T) \times L_2(0,T)$ и символ $\overset{0}{\forall}$ означает “ при почти всех”.

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из условий (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ будем называть редуцированной задачей. Ясно, что редуцированная задача является первой начально-краевой задач для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым.

Определене 2.1. При каждом $v \in V$ под решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) будем понимать функцию $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из прстранства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.2) для почти всех $(x,t) \in \Omega$, а начальному условию (2.3) для почти всех $x \in (0,l)$ и краевым условиям (2.4) для почти всех $t \in (0,T)$.

Редуцированные задачи, то есть начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений Шредингера со специальным градиентным слагаемым, ранее изучены, например, в работах [6,14,17] и др. Однако начально-краевые задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящейся только от временной переменной, мало изучены. Вторая начально-краевая задача для линейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучена в работе [11]. Отметим, что первая начально-краевая задача для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящейся только от временной переменной ранее изучена в работе [13] и доказана следующая теорема,

Теорема 2.1. Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x,t)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.8). Тогда редуцированная задача (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения верна оценка:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)} + \|f\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\right), \tag{2.9}$$

где $c_0 > 0$ некоторая постоянная.

Следует отметить, что вопрос существования и единственности решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4) ранее изучена в работе [13]. Поэтому в дальнейщем будем изучить вопрос небходимого условия для решения рассматриваемой задачи оптимального управления (2.1)-(2.4).

3. Дифференцируемость критерия качества.

В этом параграфе будем доказать дифференцируемость функционала (2.1). Пусть $\Phi = \Phi(x,t)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,t)\Phi\right) - a(x)\Phi + v_0(t)\Phi - iv_1(t)\Phi +$$

$$+2\bar{a}_2|\psi|^2\Phi + a_2\psi^2\Phi = 0, (x,t)\in\Omega, \tag{3.1}$$

$$\Phi(x,T) = -2i\left(\psi(x,T) - y(x)\right), x\in(0,l), \tag{3.2}$$

$$\Phi(0,t) = \Phi(l,t) = 0, t\in(0,T), \tag{3.3}$$

где $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,t;v)$-решение редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v\in V$. Эту краевую задачу (3.1)-(3.3) будем называть сопряженной задачей к задаче оптимального управления (2.1)-(2.4).

Здесь число a_2 и функции $a(x), a_1(x,t), \varphi(x), f(x,t), y(x)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.8). Наряду с этими условиями предположим, что функция $a_1(x,t)$ удовлетворяют еще условию:

$$\left|\frac{\partial^3 a_1(x,t)}{\partial x^3}\right| \le \mu_7, \overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega, \mu_7 = const > 0, \tag{3.4}$$

Определение 3.1. Под решением сопряженной задачи (3.1)-(3.3) будем понимать функцию $\Phi(x,t)$ из пространства $C^0([0,T], L_2(0,l))$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega\left[\Phi\left(-i\frac{\partial\bar{\eta}_1}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\bar{\eta}_1}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial\bar{\eta}_1}{\partial x} - a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(t)\bar{\eta}_1 - iv_1(t)\bar{\eta}_1 + 2\bar{a}_2|\psi^2|\bar{\eta}_1\right)\right]dxdt +$$

$$+\int_\Omega a_2\psi^2\bar{\Phi}\,\bar{\eta}_1 dxdt = -2\int_0^l\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\bar{\eta}_1(x,T)dx \tag{3.5}$$

для любой функции $\eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,0) = 0, \overset{0}{\forall} x\in(0,l)$.

Используя методику доказательства существования и единвенности решения сопряженных задач к задачам оптимального управления из работы [7], нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 3.1. Пусть число a_2 и функции $a(x), a_1(x,t), \varphi(x), f(x,t), y(x)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.8), (3.4) и $v \in V$. Тогда сопряженная задача (3.1)-(3.3) имеет единственное решение из пространства $C^0([0,T], L_2(0,l))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_2(0,l)} \leq c_1\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|f\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)} + \|y\|_{L_2(0,l)}\right), \forall t \in [0,T], \quad (3.6)$$

где $c_1 > 0$ постоянная не зависит от t.

Теорема 3.2. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1 и $\omega \in H$ заданный элемент. Тогда функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V и для любого $v \in V$ справедлива следующие формулы для градиента функционала:

$$J'_\alpha(v) = (J'_{\alpha 0}(v), J'_{\alpha 1}(v)), \quad (3.7)$$

$$J'_{\alpha 0}(v) = \int_0^l \operatorname{Re}(\psi(x.t)\bar{\Phi}(x,t))dx + 2\alpha(v_0(t) - \omega_0(t)), \quad (3.8)$$

$$J'_{\alpha 1}(v) = -\int_0^l \operatorname{Im}(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t))dx + 2\alpha(v_1(t) - \omega_1(t)), \quad (3.9)$$

где функции $\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v), \Phi(x,t) \equiv \Phi(x,t;v)$ являются решениями редуцированной задачи (2.2)-(2.4) и сопряженной задачи (3.1)-(3.3) при $v \in V$.

Доказательство. Пусть $\delta v \in B = L_\infty(0,T) \times L_\infty(0,T)$- приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$. Тогда ясно, что $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v)$ будет решением следующей начально-краевой задачи:

$$i\frac{\partial \delta\psi}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\psi}{\partial x} - a(x)\delta\psi + (v_0(t) + \delta v_0(t))\delta\psi + i(v_1(t) + \delta v_1(t))\delta\psi +$$
$$+a_2(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2)\delta\psi + a_2\psi_\delta\psi\delta\bar{\psi} = -\delta v_0(t)\psi(x,t) - i\delta v_1(t)\psi(x,t), (x,t) \in \Omega, \quad (3.10)$$

$$\delta\psi(x,0) = 0, x \in (0,l), \delta\psi(0,t) = \delta\psi(l,t) = 0, t \in (0,T), \quad (3.11)$$

где $\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v), \psi_\delta = \psi_\delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v)$-решения редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при $v \in V$, $v + \delta v \in V$, соответственно и $\delta v \in B$.

Для решения этой начально-краевой задачи можно установить справедливость слудующей оценки:

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\delta\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2\left\|\delta v\right\|^2_B,\forall t\in[0,T]. \tag{3.12}$$

где $c_2>0$ - постоянная не зависит от δv.

Рассмотрим приращение функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v\in V$. С помощью формул (2.1) имеем:

$$\delta J_\alpha(v)=J_\alpha(v+\delta v)-J_\alpha(v)=2\int_0^l\mathrm{Re}\left[(\psi(x,T)-y(x))\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx+$$

$$+2\alpha\int_0^T(v_0(t)-\omega_0(t))\delta v_0(t)dt+2\alpha\int_0^T(v_1(t)-\omega_1(t))\delta v_1(t)dt+\left\|\delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\left\|\delta v\right\|^2_H. \tag{3.13}$$

Теперь преобразуем первое слагаемое правой части этой формулы. Ясно, что решение начально-краевой задачи (3.10), (3.11) удовлетворяет условию $\delta\psi\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$. Тогда эта функция для $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ будеть удовлетворять следующему интегральному тождеству:

$$\int_\Omega\left[i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}-a(x)\delta\psi+(v_0(t)+\delta v_0(t))\delta\psi+\right.$$

$$\left.+i(v_1(t)+\delta v_1(t))\delta\psi+a_2\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)\delta\psi+a_2\psi_\delta\psi\delta\overline{\psi}\right]\overline{\eta}(x,t)dxdt=$$

$$=-\int_\Omega\delta v_0(t)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt-\int_\Omega i\delta v_1(t)\psi(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt.$$

В этом интегральном тождестве вместо пробной функции $\eta\in L_2(\Omega)$ возьмем решение $\Phi\in C^0([0,T],L_2(0,l))$ сопряженной задачи (3.1)-(3.3). Тогда получим справедливость равенства:

$$\int_\Omega\left[i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}+ia_1(x,t)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}-a(x)\delta\psi+(v_0(t)+\delta v_0(t))\delta\psi+\right.$$

$$\left.+i(v_1(t)+\delta v_1(t))\delta\psi+a_2\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2\right)\delta\psi+a_2\psi_\delta\psi\delta\overline{\psi}\right]\overline{\Phi}(x,t)dxdt=$$

$$=-\int_\Omega\delta v_0(t)\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)dxdt-\int_\Omega i\delta v_1(t)\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)dxdt. \tag{3.14}$$

Теперь в интегральном тождестве (3.5) для решения $\Phi\in C^0([0,T],L_2(0,l))$ сопряженной задачи (3.1)-(3.3) вместо пробной функции $\eta_1\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\eta_1(x,0)=0,\overset{0}{\forall}x\in(0,l)$, возьмем функцию $\delta\psi\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющей условиям $\delta\psi(x,0)=0,\overset{0}{\forall}x\in(0,l)$. Тогда имеем:

$$\int_\Omega \left[\left(-i\frac{\partial \delta\bar\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \delta\bar\psi}{\partial x^2} - ia_1(x,t)\frac{\partial \delta\bar\psi}{\partial x} - a(x)\delta\bar\psi + v_0(t)\delta\bar\psi - iv_1(t)\delta\bar\psi \right)\Phi \right] dxdt +$$

$$+\int_\Omega \left[2\bar a_2 \left|\psi^2\right| \delta\bar\psi\Phi + a_2\psi^2\delta\bar\psi\bar\Phi \right] dxdt = -2\int_0^l \left(\psi(x,T) - y(x)\right)\delta\bar\psi(x,T)\,dx \ .$$

Комплексное сопряжение этого равенства вычтем из равенства (3.14). Тогда получим следующее равенство:

$$2\int_0^l \left(\bar\psi(x,T) - \bar y(x)\right)\delta\psi(x,T)\,dx = \int_\Omega \left[a_2\left(\left|\psi_\delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\delta\psi\bar\Phi + a_2\psi_\delta\psi\delta\bar\psi\bar\Phi \right] dxdt -$$

$$-\int_\Omega \left[2a_2\left|\psi^2\right|\delta\psi\bar\Phi + \bar a_2\bar\psi^2\delta\psi\Phi \right] dxdt +$$

$$+\int_\Omega \delta v_0(t)\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\,dxdt + \int_\Omega i\delta v_1(t)\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\,dxdt +$$

$$+\int_\Omega \delta v_0(t)\delta\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\,dxdt + \int_\Omega i\delta v_1(t)\delta\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\,dxdt \,. \qquad (3.15)$$

Суммируя это равенство с его комплексным сопряжением, имеем:

$$2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\delta\bar\psi(x,T)\right] dx =$$

$$= \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\right)\delta v_0(t)\,dxdt - \int_\Omega \mathrm{Im}\left(\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\right)\delta v_1(t)\,dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\delta\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\right)\delta v_0(t)\,dxdt - \int_\Omega \mathrm{Im}\left(\delta\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\right)\delta v_1(t)\,dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2\psi_\delta\bar\Phi\right)\left|\delta\psi\right|^2 dxdt + \int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2\psi\bar\Phi\right)\left|\delta\psi\right|^2 dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2(\delta\psi)^2\bar\psi\bar\Phi\right) dxdt \,. \qquad (3.16)$$

С учетом этого равенства приращение функционала можно представить в виде:

$$\delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$= \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\right)\delta v_0(t)\,dxdt - \int_\Omega \mathrm{Im}\left(\psi(x,t)\bar\Phi(x,t)\right)\delta v_1(t)\,dxdt +$$

$$+2\alpha\int_0^T \left(v_0(t) - \omega_0(t)\right)\delta v_0(t)\,dt + 2\alpha\int_0^T \left(v_1(t) - \omega_1(t)\right)\delta v_1(t)\,dt + R(\delta v), \forall v \in V \,, \qquad (3.17)$$

где $R(\delta v)$ определяется формулой:

$$R(\delta v)=\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)\delta v_0(t)\,dxdt-\int_\Omega \mathrm{Im}\left(\delta\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)\delta v_1(t)dxdt+$$
$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2\psi_\delta\bar{\Phi}\right)|\delta\psi|^2\,dxdt+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2\psi\bar{\Phi}\right)|\delta\psi|^2\,dxdt+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_2(\delta\psi)^2\bar{\psi}\bar{\Phi}\right)dxdt$$
$$+\|\delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\delta v\|_H^2. \tag{3.18}$$

Теперь оценим остаточное слагаемое $R(\delta v)$. Используя формулы (3.18) можем написать следующее неравенство:

$$|R(\delta v)|\le\int_\Omega|\delta\psi(x,t)||\Phi(x,t)||\delta v_0(t)|dxdt+\int_\Omega|\delta\psi(x,t)||\Phi(x,t)||\delta v_1(t)|dxdt+$$
$$+\int_\Omega|a_2||\psi_\delta||\Phi||\delta\psi|^2\,dxdt+2\int_\Omega|a_2||\psi||\Phi||\delta\psi|^2\,dxdt+\|\delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\delta v\|_H^2.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|R(\delta v)|\le\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\delta\psi\|_{L_2(\Omega)}\|\delta v_0\|_{L_\infty(0,T)}+\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}\|\delta\psi\|_{L_2(\Omega)}\|\delta v_1\|_{L_\infty(0,T)}+$$
$$+|a_2|\|\psi_\delta\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))}\|\Phi\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))}\|\delta\psi\|^2_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}+$$
$$+2|a_2|\|\psi\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))}\|\Phi\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,l))}\|\delta\psi\|^2_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}+\|\delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\delta v\|_H^2. \tag{3.19}$$

В силу теоремы вложения можем написать следующее неравенство:

$$\|\delta\psi\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}\le c_3\|\delta\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}.$$

Отсюда с учетом оценки (3.12) получим справедливость оценки:

$$\|\delta\psi\|^2_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}\le c_4\|\delta v\|_B^2. \tag{3.20}$$

Ввиду того, что $\psi,\psi_\delta\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ и пространство $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ вложено в пространство $L_\infty\left(0,T;\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$, а пространство $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ вложено в пространство $L_\infty(0,l)$ с помощью оценки (2.9) и ее аналога для ψ_δ нетрудно установить справедливость неравенств:

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_5,\|\psi_\delta\|_{L_\infty(\Omega)}\le c_5. \tag{3.21}$$

Используя эти неравенства и оценки (2.9), (3.12), (3.20), а также оценку (3.6) для решения сопряженной задачи, для остатосного слагаемого $R(\delta v)$ получим следующее неравенство:

$$|R(\delta v)|\le c_6\|\delta v\|_B^2. \tag{3.22}$$

Здесь $c_6 > 0$ постоянная не зависит от δv. Это означает, что

$$R(\delta v) = o\left(\|\delta v\|_B\right). \tag{3.23}$$

Если учесть это в формуле приращения функционала, то имеем:

$$\delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$= \int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_0(t)-\omega_0(t)\right) \right] \delta v_0(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^T \left[-\int_0^l \operatorname{Im}\left(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_1(t)-\omega_1(t)\right) \right] \delta v_1(t)\,dt + o\left(\|\delta v\|_B\right), \forall v \in V. \tag{3.24}$$

Используя определение дифференцируемдсти по Фреше функционалов в функциональных пространствах и методику доказательства дифференцируемости функционалов в замкнутых множествах (см.[2,7]) из этой формулы получаем справедливость утверждения теоремы. Теорема 3.2 доказана.

4. Необходимое условие оптимальности.

Теперь укажем необходимое условие оптимальности для решения задачи оптимального управления (2.1)-(2.4).

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.2 и $v^* \in V$ является любым решением задачи оптимального управления (2.1)-(2.4). Тогда для любого $v \in V$ справедливо следующее неравенство:

$$\int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_0^*(t)-\omega_0(t)\right) \right] \left(v_0(t)-v_0^*(t)\right)dt +$$

$$+ \int_0^T \left[-\int_0^l \operatorname{Im}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_1^*(t)-\omega_1(t)\right) \right] \left(v_1(t)-v_1^*(t)\right)dt \ge 0. \tag{4.1}$$

Здесь функции $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\Phi^*(x,t) \equiv \Phi(x,t;v^*)$ являются решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) и сопряженной задачи (3.1)-(3.3) при $v^* \in V$.

Доказательство. Пусть $v^* \in V$ любое решение задачи оптимального управления (2.1)-(2.4), а $v \in V$ любой элемент и $\theta \in [0,1]$ любое число. Нетрудно проверить, что $v^* + \theta(v - v^*) \in V$, ибо из структуры множества V ясно, что оно является выпуклым.

Теперь рассмотрим следующий разность $J_\alpha\left(v^* + \theta(v-v^*)\right) - J_\alpha(v^*)$, которая удовлетворяет условию:

$$J_\alpha\left(v^* + \theta(v-v^*)\right) - J_\alpha(v^*) \ge 0, \forall v \in V\ . \tag{4.2}$$

В силу теоремы 3.2 функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V. Тогда используя (4.2) можем написать следующее равенство:

$$0 \le J_\alpha\left(v^* + \theta\left(v - v^*\right)\right) - J_\alpha\left(v^*\right) = \left\langle J'_\alpha\left(v^*\right), \theta\left(v - v^*\right)\right\rangle_B + o(\theta), \forall v \in V. \tag{4.3}$$

Здесь

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{o(\theta)}{\theta} = 0. \tag{4.4}$$

Из неравенства (4.3) имеем:

$$\theta\left\langle J'_\alpha\left(v^*\right), \left(v - v^*\right)\right\rangle_B + o(\theta) \ge 0, \forall v \in V.$$

Если обе части этого неравенства делить на $\theta > 0$ и переходить к пределу, то при $\theta \to +0$ получим справедливость неравенства:

$$\left\langle J'_\alpha\left(v^*\right), \left(v - v^*\right)\right\rangle_B \ge 0, \forall v \in V. \tag{4.5}$$

В этом неравенстве учитывая формулы для градиента $J'_\alpha(v)$ из теоремы 3.2 при $v = v^*$ и используя интегральное представление линейного функционала в пространстве $B = L_\infty(0,T) \times L_\infty(0,T)$, получим следующее неравенство:

$$\int_0^T \left[\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_0^*(t) - \omega_0(t)\right)\right]\left(v_0(t) - v_0^*(t)\right)dt +$$

$$+\int_0^T \left[-\int_0^l \operatorname{Im}\left(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v_1^*(t) - \omega_1(t)\right)\right]\left(v_1(t) - v_1^*(t)\right)dt \ge 0, \forall v \in V.$$

Здесь функции $\psi^*(x,t) \equiv \psi\left(x,t;v^*\right)$, $\Phi^*(x,t) = \Phi\left(x,t;v^*\right)$ соответственно являются решением редуцированной и сопряженной задач при $v^* \in V$. Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 4.1 доказана.

Литература

1. Бутковский А.Г., (1984). Самойленко Ю.И. *Управление квантовомеханическими процессами*. М : Наука, 256 с.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
3. Журавлев В.М. (2001). *Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией.* Ульяновск, УлГУ, 200 с.
4. Зенгин М., Ибрагимов Н., Ягуб Г. (2021). Существование и единственность решения задачи оптимального управлеия с граничным функционалом для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики со специальным градиентным слагаемым. *Вестник Ленкоранского Гос. Университета, Серия Математических и Естественных наук*, 1, с. 27-42

5. Искендеров А.Д., Ягуб. Г., Салманов В., Акцой Н.Й. (2019). Задача оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом. *Научные труды Нахичеванского Гос. Университета, Серия физико-математических и техн. наук*, № 4 (101), с. 32-44.
6. Искендеров А., Ягуб Г., Салманов В. (2018). Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом. *Научные труды Нахичеванского Гос. Университета, Сер. физико-математических и технических наук*, № 4 (93), с. 28-43.
7. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. (2012). *Идентификация квантовых потенциалов*. Баку, Чашыоглу, 548 с.
8. Ладыженская О.А. (1973). *Краевые задачи математической физики*. М: Наука, 408 с.
9. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. (1967). *Линейные иквазилинейные уравнения параболического типа.* М: Наука, 736 с.
10. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Мусаева М., Зенгин М. (2017). Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантового потенциала в нелинейном нестационарном уравнении Шредингера с комплексным кожффициентом в нелинейной части. *Вестник Ленкоранского Гос. Университета, Естественные науки*, сер.2, с.7-30
11. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Сулейманов Н. (2022). Вторая начально-краевая задача для уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримыи ограниченным комплексным потенциалом, зависящим от времени. *Вестник Ленкоранского Гос. Университета, Серия Математических и Естественных наук*, 1, с. 13-30.
12. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Зенгин М. (2022). Задача оптимального управления с граничным функционалом для уравнения Шредигера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом, зависящим от времени. *Вестник Ленкоранского Гос. Университета, Серия Математических и Естественных наук*, 2, с. 40-78.
13. Ягуб Г., Ибрагимов Н.С. (2023). Задача оптимального управления с финальным критерием качества для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым. *Материалы II Международной конференции «Теоретические и прикладные проблемы математики», Сумгаитский государственный университет*, 25-26 Апреля, Сумгаит, с. 159-162.
14. Ягубов Г., Салманов В., Ягубов В., Зенгин М. (2017). Разрешимость начально-

краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера. *Научные труды Нахичеванского Гос. Университета, Серия физико-матем. и технических наук*, № 4 (85), с. 7-21.

15. Aksoy N.Y., Celik E., and. Zengin M On optimal control of a charged particle in a varying electromagnetic field. *Waves in Random and Complex Media*, DOİ: 10.1080/17455030.2022.2142695, 16 p.
16. Lions J.-L., Magenes E. (1972). *Non-homogeneous boundary value problems and applications* - vol. 2. Berlin, 307 p.
17. Yagub G., İbrahimov N.S. and Zengin M. (2018). The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, № 2, pp. 214-232.
18. Yagubov G**.,** Toyoğlu F., Subaşı M. (2012). *An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation*. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 218, iss.11, pp.6177-6187.
19. Yakub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. (2021). Optimal control problem for the stationary quasi- optics equation with a special gradient term. *Advanced Mathematical Models and Applications*, Vol. 6, № 3, pp. 252-265.

XÜSUSİ QRADİYENT HƏDLİ QEYRİ-XƏTTİ ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ GƏRƏK ŞƏRT

Qabil Yaqub
Natiq İbrahimov
Merve Zengin
Kafkas Universiteti, Qars, Türkiyə
Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Bu işdə xüsusi qradient hədli və zamandan asılı kompleks potensiallı qeyri-xətti bir ölçülü Şredinger tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Bu məsələdə keyfiyyət meyarı final funksionaldır və idarəetmə rolunu tənliyin ölçülən məhdud əmsalları, yəni yalnız zaman dəyişənindən asılı kompleks potensialın həqiqi və xəyali hissələri oynayır. Bu işdə əvvəlcə funksionalin qradienti üçün düstur isbat edilir. Daha sonra baxılan optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün variasya bərabərsizliyi şəklində gərək şərt əldə edilir.

Açar sözlər: Qeyri-xətti Şredinger tənliyi, optimal idarəetmə məsələsi, qradient hədd, kompleks potensial, gərək şərt

A NECESSARY CONDITION IN THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERM

Gabil Yagub
Natiq Ibrahimov
Merve Zengin
Kafkas university, Kars, Turkiye
Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

In this paper, we consider the optimal control problem for a nonlinear one-dimensional Schrödinger equation with a special gradient term and with a complex potential, when the performance criterion is an final functional and the role of control is played by bounded measurable coefficiens of the equation, that is, the real and imaginary parts of complex potential, depending only from a time variable. At the same time, the formula for a gradient of the functional under consideration is first proved. Next, the necessary condition is established for solving of the optimal control problem under consideration in the form of a variational inequality
Key words: Nonlinear Schrödinger equation, optimal control problem, gradient term, complex potential, necessary condition

Daxil oldu: 02.05.2023; Çapa qəbul edildi: 14.06.2023; Çap edildi: 23.06.2023