

PARABOLİK TƏNLIYƏ CIRLAŞAN SİNGULYAR HƏYƏCANLANMIŞ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN SONSUZ YARIMZOLAQDA QOYULMUŞ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ASİMPOTOTİKASI

İlhamə Səbzəliyeva

Röya Babayeva

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti, Bakı, Azərbaycan

e-mail: isabzaliyeva@mail.ru

e-mail: rbabayeva73@gmail.com

ORCID: 0009-0004-3382-0731

ORCID: 0009-0008-5634-3463

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.2.311

Giriş

Biz fiziki xarakteristikasından digərlərinə keçidləri hamar olmayan və çox real proseslərin riyazi modellərinin tərtibi tənliklərinin qarşısında kiçik parametr olan xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunurlar. Belə diferensial tənliklərə singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər deyilir. Singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklərə A.N. Tixonov, L.S. Pontryagin, N.N. Boqolyubov, Y.A. Mitropolskiy, V. Vazov, V. Fridriks, N.J. Vişik, L.A. Lyusternik, O.A. Oleynik, E.F. Mişenko, N.X. Rozov, A.N. İlin və başqa bir çox görkəmli alimlərin diqqətlərini cəlb etmişdir. Hazırda singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərini tədqiq etmək üçün bir neçə asimptotik üsullar vardır. Lakin tətbiq dairəsinin genişliyi nöqtəyi-nəzərdən bu üsullardan ən effektiv M.I. Vişik və L.A. Lyusternikin tərəfindən işlənmiş və mahiyyəti ondan ibarət olan işlərində göstərilmiş metoddur [3, 4]. Bu üsul hazırda bütün dünyada “Vişik-Lyusternik metodu” adı altında məşhurdur.

“Vişik-Lyusternik metodu” işlənildikdən sonra singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər sahəsində olan tədqiqatların sayı sürətlə artmışdır. Hazırda xüsusi törəməli diferensial tənliklərin klassik tiplərinin hər üçünə aid kifayət qədər işlər məlumdur. Lakin singulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənliklərə dair tədqiqatların sayı elliptik və parabolik tənliklərə həsr olunmuş işlər ilə müqayisədə azdır.

İşdə aşağıdakı kvazixətti hiperbolik tənlik üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin kiçik parametrlə nəzərdən asimptotikası qurulmuşdur: [5]

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \varphi(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial t} + \psi(t, x, u) = 0$$

Hamar sərhəddə malik olan məhdud $\Omega \subset R^3$ oblastında

$$\varepsilon u_{tt} + u_t - \Delta u + u^3 = f$$

tənliyi üçün bircins Dirixle məsələsi işində tədqiq edilmişdir [1].

Singulyar həyəcanlanmış diferensial tənliklər sahəsində araşdırmalar müasir dövrdə də aktualıq kəsb edərək, sürətlə davam etdirilir.

M.M. Səbzəliyev və İ.M. Səbzəliyeva işlərində parabolik tənliyə cırlaşan sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənlik üçün sonsuz zolaqda qoyulmuş sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametmə nəzərən tam asimptotikasını qurmuşlar [2].

Sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənliklərə həsr olunmuş işlərin bir neçəsi istisna olmaqla əksəriyyətində məhdud oblastlarda qoyulmuş sərhəd məsələlərinə baxılır. Təqdim olunan bu işdə isə sinqulyar həyəcanlanmış hiperbolik tənlik üçün sonsuz yarımzolaqda qoyulmuş sərhəd məsələsi tədqiq olunur.

1. Məsələnin qoyuluşu və iterasiya proseslərinin aparılması

Bu işdə $\Pi = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, 0 \leq x < +\infty\}$ sonsuz yarımzolağında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au = f(t, x), \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2.3)$$

Burada $\varepsilon > 0$ -kiçik parametmə, $a > 0$ -sabit, $f(t, x)$ – isə verilmiş kifayət qədər hamar funksiyadır. Məqsəd (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametmə nəzərən asimptotikasını qurmaqdır.

(2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin həllinin asimptotik ayrılışını qurmaq üçün iterasiya prosesləri aparılır. Birinci iterasiya prosesinə (2.1) diferensial tənliyinin tətbiqi həlli

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots + \varepsilon^n W_n \quad (2.4)$$

şəklində axtarılır. W funksiyasının (2.4) ifadəsini

$$L_\varepsilon W = f(t, x) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.5)$$

bərabərliyində yazıb, ε –nün eyni dərəcəli qüvvətlərinin əmsalını müqayisə edərək, (2.4)-ün sağ tərəfinə daxil olan naməlum $W_i(t, x); i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənlikləri alırıq:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + aW_0 = f(t, x), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + aW_i = -\frac{\partial^2 W_{i-1}}{\partial t^2}; i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Aydındır ki, (2.6), (2.7) tənlikləri üçün (2.2) başlanğıc şərtlərindən yalnız birindən istifadə etmək olar. Biz (2.2)-də birinci yazılmış başlanğıc şərtindən istifadə edəcəyik. Onda $W_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları (2.2)-dəki ikinci başlanğıc şərtini ödəməyə bilərlər. İtən bu şərtin ödənilməsinə təmin etmək üçün ikinci iterasiya prosesi aparıb, $t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiya qurulmalıdır. Bu sərhəd zolaq tipli funksiyalar (2.2) başlanğıc şərtlərindən ikincisinin ödənilməsinə təmin etdikləri halda, W_i funksiyalarının ödədiyi birinci başlanğıc şərtini poza bilərlər. Ona görə də birinci iterasiya prosesini aparmaqdan əvvəl sərhəd zolaq tipli funksiyalar üçün tənlikləri yazmaq lazımdır.

$t = 0$ yaxınlığında $t = \varepsilon\tau, x = x$ əvəzləməsi aparaq. Onda $t = 0$ yaxınlığında L_ε operatorunun yeni (τ, x) koordinatlarında aşağıdakı ayrılığı alınır:

$$L_{\varepsilon,1} \equiv \varepsilon^{-1} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \varepsilon \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \right) \right\}. \quad (2.8)$$

$t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq tipli funksiyanı

$$L_{\varepsilon,1} V = O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.9)$$

tənliyinin təqribi həlli kimi

$$V = \varepsilon (V_0 + \varepsilon V_1 + \dots + \varepsilon^n V_n) \quad (2.10)$$

şəklində axtarıldıqda (2.10)-un sağ tərəfinə daxil olan $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarını təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənliklər alınır:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \tau^2} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial \tau^2} + \frac{\partial V_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 V_{i-1}}{\partial x^2} - a V_{i-1}; i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.12)$$

İndi W_i funksiyalarının təyin ediləcəkləri (2.6), (2.7) diferensial tənlikləri üçün başlanğıc şərtlərini və V_i funksiyalarının təyin ediləcəkləri (2.11), (2.12) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtlərini tapaq.

Tələb edək ki, $W + V$ cəmi aşağıdakı başlanğıc şərtini ödəsin:

$$(W + V)|_{t=0} = 0. \quad (2.13)$$

W -nin (2.4)-dəki, V -nin (2.10)-dakı ifadələrini (2.13)-də yazıb, ε -nun eyni dərəcəli qüvvətlərini müqayisə etdikdə alırıq:

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad W_i|_{t=0} = -V_{i-1}|_{\tau=0}; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Qeyd edək ki, $W_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları (2.14) şərtlərini ödədikdə $W + V$ cəmi (2.13) şərtini dəqiq şəkildə deyil, aşağıdakı mənada ε -nun istənilən müsbət üstlü dərəcəsinə nəzərən dəqiqliklə təqribi ödəyəcəkdir:

$$(W + V)|_{t=0} = \varepsilon^{n+1} V_n|_{t=0}. \quad (2.15)$$

(2.11), (2.12) diferensial tənlikləri üçün sərhəd şərtləri $W + V$ cəminin

$$\frac{\partial}{\partial t} (W + V)|_{t=0} = 0. \quad (2.16)$$

şərtini ödəməsi tələbindən tapılır. (2.4), (2.10), (2.16) bərabərsizliklərindən və $t = \varepsilon \tau$ əvəzləməsindən alırıq:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = -\frac{\partial W_i}{\partial t} \Big|_{t=0}; \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

(2.14)-də yazılmış ikinci bərabərlikdən və (2.17)-dən alınır ki, W_i və $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyaları növbə ilə $W_0, V_1, W_1, V_2, \dots, W_n, V_n$ ardıcılığı ilə təyin edilməlidirlər. Bu isə o deməkdir ki, ənənəvi üsuldən fərqli olaraq W_i funksiyalarının qurulması üçün aparılacaq birinci iterasiya prosesi, V_i sərhəd zolaq tipli funksiyaların qurulması üçün aparılacaq ikinci iterasiya prosesi ilə iç-içə salınmalıdır.

Qurulacaq $W + V$ cəminin (2.3) sərhəd şərtlərində ödəməsi üçün (2.6), (2.7) diferensial tənlikləri üçün

$$W_i|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_i = 0; \quad (0 \leq t \leq T); i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

sərhəd şərtlərindən də istifadə olunmalıdır. Bundan əlavə $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarının da $x = 0$ olduqda və $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfır çevrilmələri təmin edilməlidir.

İndi isə W_i və $V_i; i = 0, 1, \dots, n$ funksiyalarının qurulmasına keçək. (2.16), (2.14) və (2.18)-dən alırıq ki, W_0 funksiyası (2.6) diferensial tənliyinin

$$W_0|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty) \quad (2.19)$$

$$W_0|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_0 = 0; \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.20)$$

başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyən həllidir. (2.6) tənliyi $\varepsilon = 0$ yazdıqda (2.1) diferensial tənliyindən alınır (2.6)-ya (2.1)-ə uyğun cırlanmış tənlik, (2.6), (2.19), (2.20) sərhəd məsələsinə isə (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinə uyğun olan cırlanmış məsələ deyilir.

Məlumdur ki, (2.6) diferensial tənliyinin (2.19) başlanğıc şərtini və (2.20)-də birinci yazılmış sərhəd şərtini ödəyən məhdud həlli aşağıdakı düstur ilə təyin edilir:

$$W_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right] \right\} \times \\ \times \exp[-a(t-\tau)f(\tau, \xi)] d\tau d\xi. \quad (2.21)$$

$f(t, x)$ funksiyası üzərinə elə şərt qoyulmalıdır ki, (2.21) düsturu ilə təyin olunan $W_0(t, x)$ funksiyası (2.20)-dəki ikinci sərhəd şərtini də ödəsin.

Bu məqsədlə aşağıdakı təklif isbat edilmişdir.

Teorem 2.1. Fərz edək ki, $f(t, x) \in C^{p,q}(\Pi)$ və aşağıdakı şərt ödənilir:

$$\left| \frac{\partial^k f(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \right| \leq c_1 \exp(-c_2 x); c_1 > 0, c_2 > 0; k = k_1 + k_2; k_1 = 0, 1, \dots, p; k_2 = 0, 1, \dots, q, \quad (2.22)$$

burada p -ixtiyari natural ədəd, q -isə $q \geq 2$ şərtini ödəyən natural ədəddir. Onda (2.21) düsturu ilə təyin olunan $W_0(t, x)$ funksiyası (2.6), (2.19), (2.20) sərhəd məsələsinin həllidir və aşağıdakı şərti ödəyir:

$$\left| \frac{\partial^k W_0(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \right| \leq c_3 \exp(-c_2 x); c_3 > 0; k = k_1 + k_2; k_1 = 0, 1, \dots, p+1; k_2 = 0, 1, \dots, q. \quad (2.23)$$

Qeyd edək ki, bu teorem həm də sonra qurulacaq $V_0, W_1, V_1, \dots, W_n, V_n$ funksiyalarının da $x \rightarrow +\infty$ şərtində sıfır çevrilmələrini təmin edir.

Beləliklə, $W_0(t, x)$ funksiyası məlum olduğu üçün V_0 funksiyasını təyin etmək olar. V_0 funksiyası (2.11) adi diferensial tənliyinin $i = 0$ olduqda (2.17)-dən alınan

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau} \bigg|_{\tau=0} = -\frac{\partial W_0}{\partial t} \bigg|_{t=0} \quad (2.24)$$

şərtini ödəyən sərhəd zolaq tipli həllidir. (2.11) adi diferensial tənliyinə uyğun xarakteristik tənliyinin bir mənfi kökü vardır. Bu fakt (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin $t = 0$ üzərinə requlyar olaraq cırlaşdığını göstərir. V_0 funksiyası

$$V_0(\tau, x) = \frac{\partial W_0(0, x)}{\partial t} \exp(-\tau) \quad (2.25)$$

düsturu ilə təyin edilir. (2.20) və (2.25)-dən alınır ki, $V_0(\tau, x)$ funksiyası (2.24) şərtindən əlavə

$$V_0|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} V_0 = 0$$

şərtlərini də ödəyir .

$i = 1$ olduqda (2.7)-dən, (2.14)-dən və (2.3)-dən alınır ki, $W_1(t, x)$ funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + aW_1 = \frac{\partial^0 W_0}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

$$W_1|_{t=0} = -V_0|_{\tau=0}, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (2.27)$$

$$W_1|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_1 = 0; \quad (0 \leq t \leq T). \quad (2.28)$$

W_0, V_0 funksiyaları məlum olduqları üçün (2.26)-(2.28) sərhəd məsələsinin həlli olan $W_1(t, x)$ funksiyasını teorem 2.1-dən istifadə etməklə qurmaq olar.

Proses bu qayda üzrə davam etdirilərək, ardıcıl növbə ilə $V_1, W_2, \dots, W_n, V_n$ funksiyaları qurulurlar.

Aşağıdakı işarəni qəbul edək:

$$\tilde{u} = W + V = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{i=0}^n \varepsilon^{1+i} V_i. \quad (2.29)$$

(2.5) və (2.9)-dan alınır ki, $\tilde{u} = W + V$ funksiyası

$$L_\varepsilon \tilde{u} = f(t, x) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2.30)$$

bərabərliyini ödəyir .

(2.3), (2.15), (2.16) və (2.29) –dan alınır ki, $\tilde{u}$ funksiyası aşağıdakı başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$\tilde{u}|_{t=0} = \varepsilon^{n+1} \varphi(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (2.31)$$

$$\tilde{u}|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{u} = 0, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.32)$$

burada $\varphi(x) = V_n|_{\tau=0}$.

$u - \tilde{u}$ fərqi $u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1} z$ ilə işarə edib, $\varepsilon^{n+1} z$ -i qalıq həddi adlandıraraq. Buradan və (2.23)-dən alırıq:

$$u = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{i=0}^n \varepsilon^{1+i} V_i + \varepsilon^{n+1} z. \quad (2.33)$$

(2.33) bərabərliyi (2.1)-(2.3) sərhəd məsələsinin həllinin kiçik parametmə nəzərən asimptotik ayrılışıdır. Asimptotik ayrılışı elmi cəhətdən əsaslandırmaq üçün $\varepsilon^{n+1} z$ qalıq həddindəki z funksiyasını qiymətləndirmək lazımdır.

2. Qalıq həddinin qiymətləndirilməsi və əsas nəticə

(2.1) tənliyindən (2.30) tənliyini tərəf –tərəfə çıxaraq və $u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1} z$ olduğunu nəzərə alaraq:

$$L_\varepsilon z = F(\varepsilon, t, x). \quad (3.1)$$

Buradakı $F(\varepsilon, t, x)$ funksiyası ε -nin bütün qiymətlərində

$$\iint_{\Pi} F^2(\varepsilon, t, x) dt dx \leq c \quad (3.2)$$

şərtini ödəyən funksiyadır, $c > 0$ isə ε -dan asılı olmayan sabitdir.

$u - \tilde{u} = \varepsilon^{n+1} z$ bərabərliyindən və (2.2), (2.3), (2.37), (2.38) şərtlərindən alınır ki, z funksiyası aşağıdakı başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir:

$$z|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (3.3)$$

$$z|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} z = 0, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3.4)$$

Buradakı $\varphi(x)$ funksiyası $\varphi(x) = -V_n(0, x)$ düsturu ilə təyin edilir və

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \quad (3.5)$$

şərtini ödəyir.

Aşağıdakı təklif doğrudur.

Teorem 3.1. (3.1),(3.3),(3.4) sərhəd məsələsinin həlli olan z funksiyası üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{t=T} \right)^2 dx + \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{t=T} \right)^2 dx + \int_0^{+\infty} (z|_{t=T})^2 dx + c_1 \iint_{\Pi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dt dx \leq c_2, \quad (3.6)$$

buradakı $c_1 > 0, c_2 > 0$ sabitləri ε -dan asılı deyillər.

İsbatı. Aşağıdakı köməkçi funksiyaya baxaq:

$$z_1 = (t^2 + 1)\varphi(x). \quad (3.7)$$

Ayındır ki, z_1 funksiyası da (3.3), (3.4) başlanğıc və sərhəd şərtlərini ödəyir. Əgər $z_2 = z - z_1$ işarə etsək, z_2 funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həlli olar:

$$L_\varepsilon z_2 = F_2, \quad (3.8)$$

$$z_2|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (0 \leq x < +\infty), \quad (3.9)$$

$$z_2|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} z_2 = 0, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (3.10)$$

Burada F_2 ilə $F_2 = F - L_\varepsilon(z_1)$ funksiyası işarə olunmuşdur. (3.2) və (3.7)-dən alınır ki, $F_2(\varepsilon, t, x)$ funksiyası ε -nın bütün qiymətlərində

$$\iint_{\Pi} F_2^2(\varepsilon, t, x) dt dx \leq c_3 \quad (3.11)$$

şərtini ödəyir, $c_3 > 0$ isə ε -dan asılı olmayan sabitdir.

(3.8) tənliyinin hər iki tərəfini $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ funksiyasına vurub, sol tərəfdə alınan ikinci həddən

başqa bütün hədləri (3.9), (3.10) şərtlərini nəzərə almaqla Π oblastı üzrə hissə-hissə integrallasaq alarıq:

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z_2}{\partial t} \Big|_{t=T} \right)^2 dx + \iint_{\Pi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dt dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{t=T} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (z_2|_{t=T})^2 dx = \iint_{\Pi} F_2 \frac{\partial z_2}{\partial t} dt dx. \quad (3.12)$$

(3.12)-nin sağ tərəfindəki həddə $ab \leq \alpha^2 a^2 + \frac{1}{4\alpha^2} b^2$ elementar bərabərsizliyini tətbiq edib,

(3.11)–i nəzərə alaraq və α -nı elə seçək ki, $2 - \alpha_2^2 = c_4 > 0$ olsun. Onda z_2 funksiyası üçün (3.6)

qiymətləndirməsinin doğru olduğu alınır (c_1 əvəzinə c_4, c_2 əvəzinə $c_5 = \frac{c_3}{\alpha^2}$ götürükdə).

(3.7) düsturu ilə təyin olunan z_1 funksiyası üçün (3.6) qiymətləndirilməsinin doğru olduğu aydındır. z_1 və z_2 funksiyalarının hər ikisi üçün (3.6) qiymətləndirilməsinin doğru olmasından və $z = z_1 + z_2$ düsturundan (3.6) qiymətləndirilməsinin z funksiyası üçün də doğruluğu alınır.

Teorem 3.1 isbat olundu.

Bu işdə alınan nəticələri aşağıdakı təklif şəklində ifadə etmək olar.

Teorem 3.2. Fərz edək ki, Π oblastında təyin olunmuş $f(t, x)$ funksiyası $p = n + 2, q = n + 2$ olduqda (2.22) şərtini ödəyir. Onda (2.1) - (2.3) sərhəd məsələsinin həlli üçün (2.33) asimptotik ayrılığı doğrudur. Buradakı W_i -funksiyaları birinci iterasiya prosesində təyin edirlər, V_i -funksiyaları $t = 0$ yaxınlığında sərhəd zolaq ipli funksiyalar olub, ikinci iterasiya prosesində təyin olunurlar, $\varepsilon^{n+1}z$ qalıq həddidir və z funksiyası üçün (3.6) qiymətləndirilmə doğrudur.

Ədəbiyyat

1. Perjan A. (2006). Limits of solution to the semilinear wave equation with small parameter// Bul Akad Sci. Resp. Moldova, math., № 1, pp. 65-84.
2. Sabzaliyev M.M., Sabzaliyeva I.M. (2024). On asymptotics of solution of a boundary value problem for a quasilinear hyperbolic equation in an infinite strip// Proceedings of the 7th International Conference on Control Optimazation with Industrial Apllications (COIA 2020)- 26-28 august, Baku, Azerbaijan v 1., pp. 344-346.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. (1957). Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Успехи. матем. и наук. т.12, 5(77), с. 3–122.
4. Вишик М.И., Люстерник Л.А. (1960). Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений// Успехи. матем. и наук, т. 15, вып. 3 (93), с. 3–80.
5. Су Юй-чен. (1961). Асимптотика решений некоторых вырождающихся квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка// Доклады АН СССР, 138 (1), с.935-938.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A SEMI-INFINITE STRIP FOR A SINGULARLY PERTURBED HYPERBOLIC EQUATION DEGENERATING INTO A PARABOLIC EQUATION

Ilhama Sabzaliyeva

Roya Babayeva

Azerbaijan State University of Oil and Industry, Baku, Azerbaijan

In this paper, we consider a boundary value problem in a semi-infinite strip for a singularly perturbed second-order hyperbolic equation degenerating into a parabolic equation. To construct the asymptotics of the solution to this problem in a small parameter, we use iterative processes. The first iteration process is based on a splitting of the given operator in the equation. The second iteration is based on the second splitting of the operator, which is obtained after the appropriate substitution. Constructing the asymptotics of the solution to this problem in the traditional way, i.e., performing the first iteration and then the second iteration, is not possible. Therefore, the iterative processes are embedded. We show that the problem regularly degenerates. We construct a complete asymptotics of this problem, and estimate the resulting remainder term.

Keywords: asymptotics, boundary layer type function, remainder term

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Ильхама Сабзалиева

Роя Бабаева

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан

В данной работе рассматривается краевая задачи в полубесконечной полосе для сингулярно возмущенного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося в параболическое уравнение. Для того, чтобы построить асимптотику по малому параметру решения рассмотренной задачи, проведены итерационные процессы. Первый итерационный процесс проведен на основе расщепление данного оператора в уравнении. Второй итерационный процесс проведен на основе второго расщепления оператора, которое получается после соответствующей замены. Построение асимптотики решения рассмотренной задачи традиционным способом, т.е. проводить первый итерационный процесс, а затем второй итерационный процесс, не получается. В связи с этим итерационные процессы вложены друг в друга. В работе показано, что рассмотренная задача регулярно вырождается. Построена полная асимптотика рассмотренной задачи и оценен полученный остаточный член.

Ключевые слова: асимптотика, функция типа пограничного слоя, остаточный член

Daxil oldu: 08.07.2025

Çap edildi: 15.12.2025