

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕНЫМ И ИЗМЕРИМЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

Натиг Ибрагимов

Габил Ягуб

Туба Улкер

Карсский Кавказский Университет, Карс, Турция

Лянкяранский государственный университет, Лянкяран, Азербайджан

э-почта: gabilya@mail.ru

э-почта: natiq_ibrahimov@mail.ru

DOI: 10.30546/2960-1975.2025.1.056

Аннотация. В данной работе рассматривается вторая начально-краевая задача для нелинейного одномерного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с измеримым ограниченным комплексным потенциалом, зависящим только от времени. При этом с помощью метода Галеркина доказывается теорема о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, градиентное слагаемое, комплексный потенциал, метод Галеркина

1. Введение

Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интересы [1–3]. Начально-краевые задачи для линейного и нелинейного нестационарного уравнений без специального градиентного слагаемого ранее изучены, например, в работах [4–10] и др., а со специальным градиентным слагаемым, например, в работах [12–20] и др. Во всех этих работах от коэффициентов уравнения Шредингера, зависящих от временной переменной, потребовались дифференцируемость по временной переменной. Следует отметить, что начально-краевые задачи для нестационарного уравнения Шредингера без специального градиентного слагаемого, когда коэффициенты зависят только от временной переменной и являются измеримыми ограниченными функциями ранее изучены в работе [10]. Подобная вторая начально-краевая задача для линейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной, ранее изучена в работе [11]. Однако начально-краевые задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящим только от временной переменной почти не изучены. Поэтому изучение разрешимости второй начально-краевой задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым, когда вещественные и мнимые части комплексного потенциала являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от временной переменной представляет немалый научный и практический интерес.

2. Постановка задачи

Пусть $l > 0$, $T > 0$ - заданные числа, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega_t \equiv (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$; $C^k([0, T], B)$ - банахово пространство функций, k -раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_p(0, l)$ -лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0, l)$ со степенью $p \geq 1$; $L_2(0, T; B)$ - банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B ; $L_\infty(0, T; B)$ - банахово пространство измеримых ограниченных на $(0, T)$ функций со значениями в банаховом пространстве B ; Соболевы пространства $W_p^k(0, l)$, $W_p^{k, m}(\Omega)$ $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, определены, например, в работах [21–23].

Рассмотрим следующую вторую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t)$ из условий:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + v_0(t) \psi + i v_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi = f(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0, T),$$

(2.3)

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0$ - заданное число; a_2 - комплексное число, удовлетворяющее условиям:

$$a_2 = \operatorname{Re} a_2 + i \operatorname{Im} a_2, \operatorname{Im} a_2 > 0, \operatorname{Re} a_2 < 0, \operatorname{Im} a_2 \geq 2 |\operatorname{Re} a_2|;$$

(2.4)

$a(x), a_1(x, t), v_0(t), v_1(t)$ - измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \leq \mu_2, \left| \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \right| \leq \mu_3, \quad \forall x \in (0, l), \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3 = \text{const} > 0; \quad (2.5)$$

$$|a_1(x, t)| \leq \mu_4, \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| \leq \mu_5, \left| \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \right| \leq \mu_6, \quad \forall (x, t) \in \Omega,$$

$$a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, \quad \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = \text{const} > 0;$$

(2.6)

$$|v_s(t)| \leq b_s, \quad s = 0, 1, \quad \forall t \in (0, T), \quad b_0, b_1 = \text{const} > 0; \quad (2.7)$$

$\varphi(x), f(x, t)$ - комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(0, l), \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0; \quad (2.8)$$

$$f \in W_2^{2,0}(\Omega), \frac{\partial f(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial f(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T);$$

(2.9)

Символ $\forall^0$ означает “при почти всех”.

Определение 2.1. Под решением второй начально-краевой задачи (2.1)-(2.3) будем понимать функцию $\psi = \psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in \Omega$, а начальному условию (2.2) для почти всех $x \in (0, l)$ и краевым условиям (2.3) для почти всех $t \in (0, T)$.

3. Разрешимость второй начально-краевой задачи.

В этом разделе используя метод Галеркина будем доказывать теорему о существовании и единственности решения рассматриваемой второй начально-краевой задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 3.1. Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x, t)$, $\varphi(x)$, $f(x, t)$ удовлетворяют условиям (2.5)-(2.9). Тогда редуцированная задача (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right),$$

(3.1)

где $c_0 > 0$ - постоянная

Доказательство. Возьмем какую-либо фундаментальную в $W_2^2(0, l)$ и ортонормированную в $L_2(0, l)$ систему функций $u_k = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), x \in (0, l), X'(0) = X'(l) = 0$$

(3.2)

при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x). \quad (3.3)$$

Можем отметить, что спектральная задача (3.2) является спектральной задачей, изученной в работе [21]. Поэтому с помощью результатов этой работы можем утверждать, что спектральная задача (3.2) имеет нетривиальные решения $X = u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \dots$, образующих спектр задачи и эти решения образуют базис в пространствах $W_2^1(0, l)$, $W_2^2(0, l)$, и справедливы условия ортонормированности в $L_2(0, l)$ и ортогональности в $W_2^1(0, l)$, $W_2^2(0, l)$ в следующем виде:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0, l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m, \quad (3.4)$$

где δ_k^m символы Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Ясно, что функции $u_k(x), k = 1, 2, \dots$ ортогональны и в следующем смысле:

$$\begin{aligned} [u_k, u_m] &= (Lu_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l \left(a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \\ &= \lambda_k \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(l)} = \lambda_k^2 \delta_k^m, \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

В силу предположения $a(x) \geq \mu_0 > 0$ все собственные значения $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ вещественны, положительны и расположены в порядке возрастания:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots, \quad \lambda_k \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Наряду с этими предположим, что

$$\|u_k\|_{W_2^1(0,l)} \leq \tilde{d}_k < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

где $\tilde{d}_k, k = 1, 2, \dots$ -положительные постоянные.

По методу Галеркина приближенное решение будем искать в виде:

$$\psi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) u_k(x), \quad (3.10)$$

где $c_k^N(t) = (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}, k = 1, 2, \dots, N$ определяются из условий:

$$\begin{aligned} & i \frac{d}{dt} (\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} - (L\psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + i \left(a_1(\cdot, t) \frac{\partial \psi^N(\cdot, t)}{\partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} + \\ & + (v_0(t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + i (v_1(t) \psi^N(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)} + \left(a_2 |\psi^N(\cdot, t)|^2 \psi^N(\cdot, t), u_k \right)_{L_2(0,l)} = f_k(t), \\ & k = 1, 2, \dots, N, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$c_k^N(0) = (\psi^N(\cdot, 0), u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.12)$$

Здесь $f_k(t) = (f(\cdot, t), u_k)_{L_2(0,l)}, \varphi_k = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)}, k = 1, 2, \dots, N$.

Система (3.11) есть нечто иное, как система N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и с правой частью $f_k \in L_2(0, T)$. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что задача Коши (3.11), (3.12) имеет хотя бы одно обобщенное решение из пространства $W_2^1(0, T)$ (см: например, [24–26]).

Теперь установим оценку для решения этой задачи Коши.

Лемма 3.1. Для решения системы (3.11), (3.12) верна оценка:

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N |c_k^N(t)|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left| \frac{dc_k^N(t)}{dt} \right|^2 dt \leq \|\psi^N\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{W_2^{2,0}(0,l)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{W_2^1(0,l)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T], N=1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Доказательство леммы. Умножим каждое k -ое уравнение из (3.11) на свое $\bar{c}_k^N(t)$, полученные равенства просуммируем по k от 1 до N и проинтегрируем по t от нуля до $t \leq T$. В результате, используя формулу интегрирования по частям и условию $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0, k=1, 2, \dots$, имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N - a_0 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N - a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) |\psi^N|^2 + i v_1(\tau) |\psi^N|^2 + a_2 |\psi^N|^4 \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и в полученном равенстве используя дифференцируемость функции $a_1(x, t)$, получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau = \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |\psi^N|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |\psi^N|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (f \bar{\psi}^N) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.14)$$

Ввиду того, что функция $a_1(x, t)$ удовлетворяют однородным граничным условиям $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$, второе слагаемое равняется нулю. С учетом этого и условий на коэффициенты уравнения из равенства (3.14) нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq \|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(., \tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.15)$$

Используя формулу (3.10) можем написать следующее соотношение:

$$\|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0,l)}^2 = \sum_{k=1}^N |c_k^N(0)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 = \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2. \quad (3.16)$$

С помощью этого соотношения из (3.15) получим справедливость неравенства:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq \|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(., \tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.17)$$

Отсюда в силу неотрицательности второго слагаемого левой части этого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} \|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq \|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_0^t \|\psi^N(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

С помощью этого неравенства и леммы Гронуолла нетрудно получить справедливость оценки:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq c_2 \left(\|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T].$$

(3.18)

В силу этой оценки из неравенства (3.17) можем установить справедливость следующей оценки:

$$\|\psi^N(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_\tau} |\psi^N|^4 dx d\tau \leq c_3 \left(\|\phi\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.19)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial x}$. С этой целью и умножим k -ое уравнение системы (3.11) на свое $\lambda_k \bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, полученное равенство проинтегрируя по интервалу $(0, t)$ имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} L \bar{\psi}^N - |L \psi^N|^2 + i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + i v_1(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + a_2 |\psi^N|^2 \psi^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\ &= \int_{\Omega_t} f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.20)

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left(i \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} L \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} L \psi^N \right) + i a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} L \psi^N \right) \right) dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) (\psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{\psi}^N L \psi^N) + i v_1(\tau) (\psi^N L \bar{\psi}^N + \bar{\psi}^N L \psi^N) \right) dx d\tau + \\ &+ \int_{\Omega_t} \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{a}_2 |\bar{\psi}^N|^2 \bar{\psi}^N L \psi^N \right) dx d\tau = \\ &= \int_{\Omega_t} \left(f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) - \bar{f}(x, \tau) L \psi^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.21)

Используя формулу (3.3) для оператора L и формулу интегрирования по частям, а

также граничные условия $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + a(x) \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N \right) dx d\tau, \quad (3.22) \\ &\int_{\Omega_t} i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L \bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} \left(i a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \end{aligned}$$

$$= - \int_{\Omega_t} i a_0 a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} dx d\tau + \int_{\Omega_t} i a(x) a_1(x, \tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N dx d\tau, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N + i v_1(\tau) \psi^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(v_0(\tau) \psi^N \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) + i v_1(\tau) \psi^N \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N \right) \right) dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_0(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_0(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \\ & + \int_{\Omega_t} \left(i a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + i v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau, \end{aligned}$$

(3.24)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N L \bar{\psi}^N - \bar{a}_2 |\psi^N|^2 \bar{\psi}^N L \psi^N \right) dx d\tau = 2i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + i a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau + \\ & + a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau, \end{aligned}$$

(3.25)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t} f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau = \int_{\Omega_t} f(x, \tau) \left(-a_0 \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x^2} + a(x) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega_t} \left(a_0 \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} + a(x) f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.26) \end{aligned}$$

С учетом этих равенств (3.22) - (3.26) из равенства (3.21) получим справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned} & i \int_{\Omega_t} a_0 \left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial t \partial x} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right) dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a(x) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \psi^N \right) dx d\tau - \\ & - i \int_{\Omega_t} a_0 a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\psi}^N}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) dx d\tau + \\ & + i \int_{\Omega_t} a(x) a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \psi^N \right) dx d\tau + \\ & + 2i \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + i a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau + \\ & + a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2i \int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} \right) dx d\tau + \\
 &+ 2i \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} \left(f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

(3.27)

Ясно, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 &ia_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau = \\
 &= i4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + i2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\psi^N \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau,
 \end{aligned}$$

(3.28)

$$\begin{aligned}
 &a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \psi^N \right) \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(|\psi^N|^2 \bar{\psi}^N \right) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right] dx d\tau = \\
 &= i2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\bar{\psi}^N \right)^2 \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau.
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

С помощью этих формул из равенства (3.27) нетрудно получить следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a(x) \frac{\partial}{\partial t} |\psi^N|^2 dx d\tau - \\
 &- \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \\
 &+ \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) a_1(x, \tau) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau - \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} (a(x) a_1(x, \tau)) |\psi^N|^2 dx d\tau + \\
 &+ 2 \int_{\Omega_t} \left(a_0 v_1(\tau) \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + v_1(\tau) a(x) |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\
 &+ 4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + 2a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left[\left(\psi^N \right)^2 \left(\frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau + \\
 &+ 2a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left[\left(\bar{\psi}^N \right)^2 \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \right] dx d\tau = \\
 &= 2 \int_{\Omega_t} a_0 \operatorname{Im} \left(\frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N(x, \tau)}{\partial x} \right) dx d\tau + \\
 &+ 2 \int_{\Omega_t} a(x) \operatorname{Im} \left(f(x, \tau) \bar{\psi}^N(x, \tau) \right) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

(3.30)

В силу условий $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$ третье и пятое слагаемые левой части этого равенства равняются нулю. С учетом этого из последнего равенства нетрудно установить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & a_0 \int_0^l \left| \frac{\partial \psi^N(x, t)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\psi^N(x, t)|^2 dx + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + 4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq a_0 \int_0^l \left| \frac{\partial \psi^N(x, 0)}{\partial x} \right|^2 dx + \int_0^l a(x) |\psi^N(x, 0)|^2 dx + \\ & + a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(a(x) \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| + \left| \frac{da(x)}{dx} \right| a_1(x, \tau) \right) |\psi^N|^2 dx d\tau + \\ & + 2 \int_{\Omega_t} \left(a_0 |v_1(\tau)| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 + a(x) |v_1(\tau)| |\psi^N|^2 \right) dx d\tau + \\ & + 2a_0 (\operatorname{Im} a_2 + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial \psi^N(x, \tau)}{\partial x} \right| dx d\tau + \\ & + 2 \int_{\Omega_t} a(x) |f(x, \tau)| |\psi^N(x, \tau)| dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

С помощью условия (2.5) и условий на коэффициенты уравнения, а также неравенства Коши-Буняковского из этого равенства нетрудно получить справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \mu_0 \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 2\mu_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(., 0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + \mu_1 \|\psi^N(., 0)\|_{L_2(0, l)}^2 + \\ & + a_0 (\mu_5 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (\mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_5 + 2\mu_1 b_1 + \mu_1) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \\ & + a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial f(x, \tau)}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + \mu_1 \int_{\Omega_t} |f(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.31)

С помощью формулы (3.10) нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(., 0)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_4 \|\varphi\|_{W_2^1(0, l)}^2. \quad (3.32)$$

В силу этого неравенства и соотношения (3.16), а также оценки (3.19) из неравенства (3.31) получим справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^2 + 2 \frac{\mu_0}{a_0} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq c_5 \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,I)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right) + c_6 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.33)

Из этого неравенства имеем:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 \leq c_7 \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,I)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right) + c_8 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Отсюда с помощью леммы Гронуолла получим справедливость следующей оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 \leq c_9 \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,I)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.34)$$

В силу этой оценки из неравенства (3.33) установим оценку:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,I)}^2 + 2 \frac{\mu_0}{a_0} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau \leq \\ \leq c_{10} \left(\|\phi\|_{W_2^1(0,I)}^2 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^2 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.35)

Теперь оценим $\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2}$. С этой целью и умножим k -ое уравнение системы (3.11) на свое $\lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t)$, а потом полученные уравнения просуммируем по k от 1 до N . Тогда, имеем:

$$\begin{aligned} i \sum_{k=1}^N \int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) - \sum_{k=1}^N \int_0^l L \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \\ + i \sum_{k=1}^N \int_0^l a_1(x,t) \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x} u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \sum_{k=1}^N \int_0^l v_0(t) \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \\ + i \sum_{k=1}^N \int_0^l v_1(t) \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) + \sum_{k=1}^N \int_0^l a_2 |\psi^N(x,t)|^2 \psi^N(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t) = \\ = \sum_{k=1}^N \int_0^l f(x,t) u_k(x) dx \lambda_k^2 \bar{c}_k^N(t). \end{aligned}$$

В этом равенстве используя равенство $Lu_k = \lambda_k u_k$ и с помощью формулы интегрирования по частям преобразуем каждый интеграл этого равенства. Тогда в полученном равенстве используя формулу (3.10) после интегрирования по t от нуля до $t \leq T$ получим справедливость равенства:

$$\begin{aligned} i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (L \psi^N) L \bar{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} L (L \psi^N) L \bar{\psi}^N dx d\tau + i \int_{\Omega_t} L \left(a_1(x,\tau) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right) L \bar{\psi}^N dx d\tau + \\ + \int_{\Omega_t} v_0(\tau) |L \psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L \psi^N|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} L \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N \right) L \bar{\psi}^N dx d\tau = \\ = \int_{\Omega_t} L f(x,\tau) L \bar{\psi}^N(x,\tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.36)

Теперь в этом равенстве преобразуем второе, третье и шестое слагаемые левой части. С помощью формулы:

$$L(L\psi^N) = -a_0 \frac{\partial}{\partial x^2} (L\psi^N) + a(x) L\psi^N$$

(3.37)

и формулы интегрирования по частям можем написать следующее равенство:

$$\int_{\Omega_t} L(L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} a_0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a(x) |L\psi^N|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.38)

Для преобразования третьего слагаемого левой части равенства (3.36) сначала преобразуем подинтегральное выражение $L\left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right)$. С помощью формулы оператора L имеем:

$$\begin{aligned} L\left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) &= -a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right) + a(x) a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} = \\ &= -a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} - 2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \psi^N - a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \psi^N + \\ &\quad + 2 \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} L\psi^N + a_1(x, t) \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Теперь преобразуем шестое слагаемое. С помощью формулы оператора L имеем:

$$\begin{aligned} L\left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N\right) &= -a_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a_2 |\psi^N|^2 \psi^N\right) + a_2 a(x) |\psi^N|^2 \psi^N = \\ &= 2a_2 |\psi^N|^2 L\psi^N - a_2 a(x) |\psi^N|^2 \psi^N - 4a_0 a_2 \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \psi^N - 2a_0 a_2 \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N. \end{aligned}$$

(3.40)

Тогда с помощью формул (3.38) - (3.40) равенство (3.36) можем написать в виде:

$$\begin{aligned} &i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau - \int_{\Omega_t} a_0 \left| \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) \right|^2 dx d\tau - \int_{\Omega_t} a(x) |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\ &- i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N dx d\tau - i \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ &\quad + i \int_{\Omega_t} 2 \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N dx d\tau + \\ &\quad + \int_{\Omega_t} v_0(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\ &\quad + 2a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau - a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau - 4a_0 a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \psi^N L\bar{\psi}^N dx d\tau - \\ &\quad - 2a_0 a_2 \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L\bar{\psi}^N dx d\tau = \int_{\Omega_t} Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau) dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.41)

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение имеем:

$$\begin{aligned}
& i \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial t} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau + \\
& + 4i \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau + i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau - \\
& - i \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N + \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial x} L\psi^N \right) dx d\tau - \\
& - i \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) (\psi^N L\bar{\psi}^N + \bar{\psi}^N L\psi^N) dx d\tau + \\
& + 2i \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + 4i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\
& - 2i \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - 2i \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - \\
& - 8ia_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - 8ia_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - \\
& - 4ia_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau - 4ia_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\
& = 2i \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} (Lf(x, \tau) L\bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
\end{aligned}$$

(3.42)

Теперь в этом равенстве преобразуем третье слагаемое левой части. Ясно, что имеет место равенство:

$$\begin{aligned}
i \int_{\Omega_t} a_1(x, \tau) \left(\frac{\partial}{\partial x} (L\psi^N) L\bar{\psi}^N + \frac{\partial}{\partial x} (L\bar{\psi}^N) L\psi^N \right) dx d\tau &= i \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(x, \tau) |L\psi^N|^2 \right) dx d\tau - \\
&- i \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Если учесть это равенство в левой части равенства (3.42), то получим справедливость равенства, из которого в силу условий $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$ устанавливаем справедливость следующего равенства:

$$\begin{aligned}
& \int_0^l |L\psi^N(x, t)|^2 dx - \int_0^l |L\psi^N(x, 0)|^2 dx + \\
& + 3 \int_{\Omega_t} \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} |L\psi^N|^2 dx d\tau - 2 \int_{\Omega_t} a_0 \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau - \\
& - 2 \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} + a_1(x, t) \frac{da(x)}{dx} \right) \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau + \\
& + 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |L\psi^N|^2 dx d\tau + 4 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau - \\
& - 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau - 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L\bar{\psi}^N) dx d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -8a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Re}(\psi^N L \bar{\psi}^N) dx d\tau - 8a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \operatorname{Im}(\psi^N L \bar{\psi}^N) dx d\tau - \\
 & -4a_0 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau - 4a_0 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right)^2 \bar{\psi}^N L \bar{\psi}^N \right) dx d\tau = \\
 & = 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(L f(x, \tau) L \bar{\psi}^N(x, \tau)) dx d\tau, \forall t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

(3.44)

Используя формулу $L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) Lu_k(x)$ и условие (3.12) имеем:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N c_k^N(0) Lu_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k Lu_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x). \quad (3.45)$$

С другой стороны можем написать следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \int_0^l \varphi(\xi) u_k(\xi) d\xi u_k(x) = \sum_{k=1}^N \int_0^l \varphi(\xi)(x) Lu_k(\xi) d\xi u_k(x).$$

С помощью интегрирования по частям имеем:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi_k u_k(x) = \sum_{k=1}^N \int_0^l L\varphi(\xi)(x) u_k(\xi) d\xi u_k(x).$$

Учитывая это равенство в равенстве (3.45) получим следующее равенство:

$$L\psi^N(x, 0) = \sum_{k=1}^N \int_0^l L\varphi(\xi)(x) u_k(\xi) d\xi u_k(x) = \sum_{k=1}^N (L\varphi)_k u_k(x) \quad (3.46)$$

В силу этой формулы нетрудно установить справедливость соотношения:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 = \sum_{k=1}^N |(L\varphi)_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(L\varphi)_k|^2 = \|L\varphi\|_{L_2(0, l)}^2.$$

Из этого соотношения и вида оператора L можем установить справедливость неравенства:

$$\|L\psi^N(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq c_{11} \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2.$$

(3.47)

С учетом этого соотношения из равенства (3.44) можем получить справедливость неравенства:

$$\begin{aligned}
 & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 4 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq c_{11} \|\varphi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \\
 & + 3 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial a_1(x, \tau)}{\partial x} \right| |L\psi^N|^2 dx d\tau + 2a_0 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial^2 a_1(x, \tau)}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right| |L\psi^N| dx d\tau + \\
 & + 2 \int_{\Omega_t} \left(2a(x) \left| \frac{\partial a_1(x, t)}{\partial x} \right| + |a_1(x, t)| \left| \frac{da(x)}{dx} \right| \right) |\psi^N| |L\psi^N| dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} |v_1(\tau)| |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\
 & + (2 \operatorname{Im} a_2 + 2 |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} a(x) |\psi^N|^2 |L\psi^N| dx d\tau + \\
 & + (12a_0 \operatorname{Im} a_2 + 12a_0 |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 |\psi^N| |L\psi^N| dx d\tau +
 \end{aligned}$$

$$+2 \int_{\Omega_t} |Lf(x, \tau)| |L\psi^N(x, \tau)| dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

(3.48)

Используя условия на коэффициенты уравнения, применяя неравенство Коши-Буняковского и условий (2.5), а также неравенство Коши с ε и с выбором $\varepsilon = \frac{1}{6a_0}$ из

этого неравенства имеем:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq c_{11} \|\phi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \\ & + (3\mu_5 + a_0\mu_6 + 2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\ & + a_0\mu_6 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \frac{3}{2} \operatorname{Im} a_2 \mu_1^2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + 54a_0^2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^4 dx d\tau + \int_{\Omega} |Lf(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

В силу известного неравенства (см. [21], стр. 78) можем написать следующее неравенство:

$$\int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^4 dx d\tau \leq \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, l)} \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^3 d\tau, \forall t \in [0, T], \quad (3.50)$$

где $\beta > 0$ - некоторая постоянная. Применяя в правой части этого неравенства неравенство Коши-Буняковского имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^4 dx d\tau \leq \frac{\beta}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau + \frac{\beta}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^6 d\tau, \forall t \in [0, T]. \quad (3.51)$$

С учетом этого неравенства из (3.49) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq c_{11} \|\phi\|_{W_2^2(0, l)}^2 + \\ & + (3\mu_5 + a_0\mu_6 + 2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4 + 2b_1 + 1) \int_{\Omega_t} |L\psi^N|^2 dx d\tau + \\ & + a_0\mu_6 \int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx d\tau + (2\mu_1\mu_5 + \mu_2\mu_4) \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 dx d\tau + \frac{3}{2} \operatorname{Im} a_2 \mu_1^2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^4 dx d\tau + \\ & + 27a_0^2 \operatorname{Im} a_2 \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, l)}^6 d\tau + 27a_0^2 \operatorname{Im} a_2 \beta \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau + \\ & + \int_{\Omega} |Lf(x, \tau)|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(3.52)

Отсюда в силу оценок (3.19), (3.35) и неравенства:

$$\|Lf\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{12} \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 \quad (3.53)$$

получим справедливость неравенства:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq \\ & + c_{13} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right) + c_{14} \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, \tau)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau + \\ & + c_{15} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Используя формулу для оператора L нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, I)} \leq \frac{1}{a_0} \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)} + \frac{\mu_1}{a_0} \|\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}. \quad (3.55)$$

С учетом этого неравенства и оценки (3.19) из неравенства получим справедливость следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq \\ & \leq c_{16} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right) + c_{17} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

В силу неотрицательности второго слагаемого можем написать следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 \leq c_{16} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right) + \\ & + c_{17} \int_0^t \|L\psi^N(\cdot, \tau)\|_{L_2(0, I)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

С помощью леммы Гронуолла из этого неравенства получим справедливость оценки:

$$\|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 \leq c_{18} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.57)$$

С учетом этой оценки из неравенства (3.56) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \|L\psi^N(\cdot, t)\|_{L_2(0, I)}^2 + \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} |\psi^N|^2 |L\psi^N|^2 dx d\tau \leq \\ & \leq c_{19} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Из неравенства (3.55) в силу оценок (3.19) и (3.57) имеем:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(\cdot, t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0, I)}^2 \leq c_{20} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.59)$$

Суммируя (3.18), (3.34) и (3.59) получим справедливость следующей оценки:

$$\|\psi^N(\cdot, t)\|_{W_2^2(0, I)}^2 \leq c_{21} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.60)$$

Теперь оценим $\frac{\partial \psi^N}{\partial t}$. С этой целью каждое k -ое уравнение системы (3.11) на свое $\frac{d\bar{c}_k^N(t)}{dt}$ и все полученные равенства просуммируем по $k=1$ до $k=N$. Тогда полученное уравнение интегрируя по интервалу $(0, T)$ имеем:

$$\int_{\Omega} \left(i \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} - a(x) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau + \\ + \int_{\Omega} \left(v_0(t) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + i v_1(t) \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} + a_2 |\psi^N|^2 \psi^N \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau = \int_{\Omega} f \frac{\partial \bar{\psi}^N}{\partial t} dx d\tau.$$

Из этого равенства с помощью неравенства Коши-Буняковского получим следующее неравенство:

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 dx dt \leq 7 a_0^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right|^2 dx dt + 7 \mu_4^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 dx dt + \\ + 7 (\mu_1^2 + b_0^2 + b_1^2) \int_{\Omega} |\psi^N|^2 dx dt + 7 |a_2|^2 \int_{\Omega} |\psi^N|^6 dx dt + 7 \int_{\Omega} |f|^2 dx dt.$$

(3.61)

Теперь оценим четвертое слагаемое правой части этого неравенства. В силу неравенства, известного из работы [21, сmp.78], можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_{\infty}(0, I)} \leq \tilde{\beta} \left\| \frac{\partial \psi^N(., t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0, I)}^{\frac{1}{2}} \|\psi^N(., t)\|_{L_2(0, I)}^{\frac{1}{2}}, \forall t \in [0, T].$$

(3.62)

Здесь $\tilde{\beta} > 0$ - некоторая постоянная. Из этого неравенства в силу оценок (3.18) и (3.34) имеем:

$$\|\psi^N(., t)\|_{L_{\infty}(0, I)}^6 \leq c_{22} \left(\|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T].$$

(3.63)

В силу этой оценки и оценки (3.60) из неравенства получим справедливость следующей оценки:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{23} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T]. \quad (3.64)$$

Интегрируя обе части оценки (3.60) по t по интервалу $(0, T)$ и полученную оценку суммируя с оценкой (3.64) получим следующую оценку:

$$\|\psi^N\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_{24} \left(\|\phi\|_{W_2^2(0, I)}^2 + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{W_2^1(0, I)}^6 + \|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}^6 \right), \forall t \in [0, T], N = 1, 2, \dots, \quad (3.65)$$

где $c_{24} > 0$ постоянная не зависит от N . Используя эту оценку с выбором $c_0 = c_{24}$ нетрудно доказать утверждение леммы. Лемма 3.1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы. Благодаря оценке (3.13) или (3.65) из последовательности $\{\psi^N(x, t)\}$ можем выделить подпоследовательность $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$, которая сходится к функции $\psi(x, t)$ слабо в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$. Покажем, что эта

предельная функция $\psi(x, t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) в смысле определения 2.1. С этой целью сначала докажем, что эта функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для почти всех $(x, t) \in \Omega$. Поэтому при $N = N_m$ уравнение из (3.11) умножим на произвольную функцию $\bar{\eta}_k(t)$, где $\bar{\eta}_k(t)$ есть k -й коэффициент Фурье произвольной функции $\bar{\eta}(x, t)$ из пространства $L_2(\Omega)$, то есть $\bar{\eta}_k(t) = (\bar{\eta}(\cdot, t), u_k)_{L_2(0, l)}$. Полученные уравнения складываем по k от $k=1$ до $N' \leq N_m$ и результат проинтегрируем в пределах от нуля до T . Тогда получим:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^{N_m}}{\partial x^2} + i a_1(x, t) \frac{\partial \psi^{N_m}}{\partial x} - a(x) \psi^{N_m} + v_0(t) \psi^{N_m} + i v_1(t) \psi^{N_m} + a_2 |\psi^{N_m}|^2 \psi^{N_m} - f(x, t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx dt = 0 \quad (3.66)$$

для любой функции $\bar{\eta}^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$, $N' \leq N_m$. В силу компактности вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ можем написать следующее предельное соотношение:

$$\psi^{N_m} \rightarrow \psi \quad \text{сильно} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega) \quad (3.67)$$

при $m \rightarrow \infty$. Тогда известно, что из последовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ можно выделить подпоследовательность, которую для общности снова обозначим через $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$, сходится почти всюду в Ω , то есть имеет место предельное соотношение:

$$\psi^{N_m}(x, t) \rightarrow \psi(x, t) \quad \text{почти всех } (x, t) \in \Omega \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (3.68)$$

С другой стороны, в силу вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))$ можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi^{N_m}\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))} \leq c_{25} \|\psi^{N_m}\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}.$$

Тогда в силу оценки (3.13) при $N = N_m, m = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\|\psi^{N_m}\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))} \leq c_{26}, m = 1, 2, \dots \quad (3.69)$$

С помощью этого неравенства можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi^{N_m}\|^2 \|\psi^{N_m}\|^2 = \int_0^T \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \int_0^T \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_6(0, l)}^6 dt, m = 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

С другой стороны, в силу неравенства (3.62) при $N = N_m, m = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_6(0, l)}^6 dt &\leq l \int_0^T \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{L_{\infty}(0, l)}^6 dt \leq c_{26} \int_0^T \left\| \psi^{N_m}(\cdot, t) \right\|_{W_2^1(0, l)}^6 dt \leq \\ &\leq c_{27} \left\| \psi^{N_m} \right\|_{L_{\infty}(0, T; W_2^1(0, l))}^6, m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда в силу этого неравенства и неравенства (3.69) из неравенства (3.70) получим справедливость следующего неравенства:

$$\left\| |\psi^{N_m}|^2 \psi^{N_m} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{28}, m = 1, 2, \dots$$

(3.71)

Поэтому из этого неравенства и силу известных лемм из работы [22, стр.330–331] установим справедливость следующего предельного соотношения:

$$|\psi^{N_m}|^2 \psi^{N_m} \rightarrow |\psi|^2 \psi \quad \text{слабо} \quad \text{в} \quad L_2(\Omega)$$

(3.72)

при $m \rightarrow \infty$. Учитывая это предельное соотношение и слабую сходимость подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ к функции $\psi(x, t)$ в пространстве $W_2^{2,1}(\Omega)$ и переходя к пределу по $N_m, m = 1, 2, \dots$ в интегральном тождестве (3.66) получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + \right. \\ \left. + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi - f(x, t) \right) \bar{\eta}^{N'}(x, t) dx dt = 0$$

для любой функции $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$. В виду того, что $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t) = \sum_{k=1}^{N'} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$

является частичной суммой ряда $\bar{\eta}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\eta}_k(t) u_k(x)$, при $N' \rightarrow \infty$ частичная сумма $\bar{\eta}_k^{N'}(x, t)$ сходится к функции $\bar{\eta}(x, t)$ в $L_2(\Omega)$. Тогда с учетом этого если переходить к пределу в последнем тождестве, то получим того, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x) \psi + \right. \\ \left. + v_0(t) \psi + iv_1(t) \psi + a_2 |\psi|^2 \psi - f(x, t) \right) \bar{\eta}(x, t) dx dt = 0$$

(3.73)

для любой функции $\eta = \eta(x, t)$ из пространства $L_2(\Omega)$. Отсюда заключаем, что предельная функция $\psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.2) для почти всех $(x, t) \in \Omega$. Теперь покажем, что эта функция $\psi(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ удовлетворяет начальному условию (2.3) для почти всех $x \in (0, l)$, то есть условию $\psi(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in (0, l)$. В силу теорем компактного вложения пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0, T], L_2(0, l))$ можем написать следующее предельное соотношение:

$$\|\psi^{N_m}(\cdot, t) - \psi(\cdot, t)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \quad (3.74)$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$ при $m \rightarrow \infty$. Кроме того, можем написать следующее неравенство:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} \leq \|\psi(\cdot, 0) - \psi^{N_m}(\cdot, 0)\|_{L_2(0, l)} + \|\psi^{N_m}(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)}. \quad (3.75)$$

Используя предельное соотношение (3.74) при $t = 0$ получаем, что первое слагаемое в правой части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Поэтому покажем, что и второе слагаемое в правой части этого неравенства при $m \rightarrow \infty$ также стремится к нулю. Используя формулу (3.10) имеем:

$$\psi^{N_m}(x, 0) = \sum_{k=1}^{N_m} c_k^{N_m}(0) u_k(x) = \sum_{k=1}^{N_m} \varphi_k u_k(x) = \varphi^{N_m}(x).$$

Ввиду того, что $\varphi^{N_m}(x)$ является частичной суммой ряда Фурье для функции $\varphi = \varphi(x)$ из пространства $W_2^2(0, l)$, удовлетворяющей условиям $\frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0$. С учетом этого если переходить к пределу во втором слагаемом правой части неравенства (3.75), то при $m \rightarrow \infty$ получим, что оно стремится к нулю, то есть имеет место предельное соотношение:

$$\|\psi^{N_m}(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

(3.76)

Таким образом, с учетом этого предельного соотношения и предельного соотношения (3.74) при $t = 0$ если переходить к пределу в обеих частях неравенства (3.75), то при $m \rightarrow \infty$ получим справедливость соотношения:

$$\|\psi(\cdot, 0) - \varphi\|_{L_2(0, l)} = 0.$$

Из этого соотношения получаем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет условию начальному условию из (2.3), то есть $\psi(x, 0) = \varphi(x), \forall x \in (0, l)$. Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.4). Известно из работ [22, 23], что для элементов подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ в силу теоремы о следах имеет место соотношение:

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, \cdot)}{\partial x}, \frac{\partial \psi^{N_m}(l, \cdot)}{\partial x} \in L_2(0, T), m = 1, 2, \dots$$

(3.77)

В силу свойства сходимости подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ получим справедливость предельных соотношений: при $m \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(0, \cdot)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(0, \cdot)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0, T), \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(l, \cdot)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \psi(l, \cdot)}{\partial x} \text{ слабо в } L_2(0, T). \quad (3.79)$$

С другой стороны, для элементов подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ имеет место следующие равенства

$$\frac{\partial \psi^{N_m}(s, t)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N_m} c_k^{N_m}(t) \frac{du_k(s)}{dx}, s = 0, l.$$

Из этих равенств в силу условий $\frac{du_k(0)}{dx} = \frac{du_k(l)}{dx} = 0$ получим справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\partial \psi^{N_b}(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{N_b}(l, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.80)$$

Для $\forall \eta \in L_2(0, T)$ можем написать следующие равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt &= \int_0^T \left(\frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{N_p}(s, t)}{\partial x} \right) \bar{\eta}(t) dt + \\ &+ \int_0^T \frac{\partial \psi^{N_p}(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt, s = 0, l. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Тогда с учетом соотношений (3.80) и предельных соотношений (3.78), (3.79) если переходить к пределу в обеих частях равенств (3.81), то отсюда при $m \rightarrow \infty$ для любой функции $\eta \in L_2(0, T)$ получим справедливость соотношений:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi(s, t)}{\partial x} \bar{\eta}(t) dt = 0, s = 0, l.$$

Из этих соотношений получим, что предельная функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.4) для почти всех $t \in (0, T)$, то есть имеет место:

$$\frac{\partial \psi(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l, t)}{\partial x} = 0, \forall t \in (0, T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x, t)$ является решением редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ и это решение принадлежит пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка (3.1), которая непосредственно следует из оценки (3.13) после перехода к нижнему пределу по слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, t)\}$ из $W_2^{2,1}(\Omega)$ к функции $\psi(x, t)$.

Теперь докажем единственность решения редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$. Пусть любые две функции $\psi(x, t)$ и $\phi(x, t)$ являются решениями редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$. Обозначим $w(x, t) = \psi(x, t) - \phi(x, t)$. Тогда ясно, что функция $w = w(x, t)$ будет решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial w}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ia_1(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} - a(x)w + v_0(t)w + iv_1(t)w + a_2(|\psi|^2 + |\phi|^2)w + \\ + a_2\psi\phi\bar{w} = 0, (x, t) \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$w(x, 0) = 0, x \in (0, l), \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = 0, t \in (0, T). \quad (3.84)$$

Ввиду того, что функции $\psi(x, t)$ и $\phi(x, t)$ являются решениями редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$ и принадлежат пространству $W_2^{2,1}(\Omega)$ функция $w = w(x, t)$ будет удовлетворять следующему интегральному тождеству:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial w}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + i a_1(x, \tau) \frac{\partial w}{\partial x} - a(x) w + v_0(\tau) w + i v_1(\tau) w + \right. \\ \left. + a_2(|\psi|^2 + |\phi|^2) w + a_2 \psi \phi \bar{w} \right) \bar{\eta}(x, \tau) dx d\tau = 0, \forall t \in [0, T]$$

(3.85)

для любой функции $\eta \in L_2(\Omega)$ и начальному условию (3.83) для почти всех $x \in (0, l)$ и краевым условиям (3.84) для почти всех $t \in (0, T)$. В этом интегральном тождестве вместо функции $\eta(x, t)$ возьмем функцию $w(x, t)$ из пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$. Тогда с помощью интегрирования по частям можем написать равенство, из которого вычитывая его комплексное сопряжение имеем:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} w \right) dx d\tau + \int_{\Omega_t} \left(a_1(x, \tau) \frac{\partial w}{\partial x} \bar{w} + a_1(x, \tau) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} w \right) dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |w|^2 dx d\tau + \\ + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re}(\psi \phi (\bar{w})^2) dx d\tau + \\ + 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(\psi \phi (\bar{w})^2) dx d\tau = 0, \forall t \in [0, T].$$

(3.86)

Преобразуя второе слагаемое левой части этого равенства и используя условия $a_1(0, t) = a_1(l, t) = 0, t \in (0, T)$, получим справедливость следующего равенства:

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} w \right) dx d\tau + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau = \\ = -2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |w|^2 dx d\tau - 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Re}(\psi \phi (\bar{w})^2) dx d\tau - 2 \operatorname{Re} a_2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(\psi \phi (\bar{w})) dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Из этого равенства с помощью условия (3.83) получим справедливость неравенства:

$$\|w(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 + 2 \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau \leq \\ \leq 2 \int_{\Omega_t} v_1(\tau) |w|^2 dx d\tau + 2(|\operatorname{Im} a_2| + |\operatorname{Re} a_2|) \int_{\Omega_t} |\psi| |\phi| |w|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

С помощью неравенства $2|\psi| |\phi| \leq |\psi|^2 + |\phi|^2$ и условий на функции $v_1(t)$, а также условия (2.5), получим следующее неравенство:

$$\|w(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Im} a_2 \int_{\Omega_t} (|\psi|^2 + |\phi|^2) |w|^2 dx d\tau \leq 2b_1 \int_{\Omega_t} |w|^2 dx d\tau, \forall t \in [0, T].$$

В силу неотрицательности второго слагаемого левой части получим следующее неравенство:

$$\|w(., t)\|_{L_2(0, l)}^2 \leq 2b_1 \int_0^t \|w(., \tau)\|_{L_2(0, l)}^2 d\tau, \forall t \in [0, T].$$

Применяя лемму Гронуолла получим справедливость соотношения:

$$\|w(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 = 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Отсюда следует, что

$$w(x,t) = 0, \quad \forall x \in (0, l): \forall t \in [0, T].$$

Из этого соотношения и формулы $w(x,t) = \psi(x,t) - \phi(x,t)$ следует единственность решения редуцированной задачи (2.2)-(2.4) при каждом $v \in V$. Теорема 3.1 доказана.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелявистская теория. М.: Физматгиз, 1963, т. 3, 702 с.
2. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985, 366 с.
3. Журавлев В.М. Нелинейные волны в много компонентных системах с дисперсией и диффузией. Ульяновск, УлГУ, 2001, 200 с.
4. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // Докл. АН СССР, 1988, т. 303, № 5, с. 1044-1048.
5. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами // Автоматика и телемехан., 1989, № 12, с. 27-38.
6. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения, 1997, т.33, № 12, с. 1691-1698.
7. Искендеров А., Ягубов Г. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Сер. Естественных наук, 2007, Ленкорань, с. 3-56.
8. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Идентификация квантовых потенциалов. Баку, Чашыоглу, 2012, 548 с.
9. Ibragimov N.S. Solvability of initial-boundary value problems for a multidimensional nonlinear stationary quasi-optics equation with a purely imaginary coefficient in the nonlinear part. News of Baku State University, Ser. Phys. Math. Sciences, No.3, 2010, pp.72-84. (in Russian).
10. Ibragimov N.S. Solvability of initial-boundary value problems for a linear stationary equation of quasi-optics. International Journal of Caucasian University "Mathematics and Informatics", Vol.1, No.29, 2010, pp.61-70. (in Russian).
11. G. Yagub, N. Ibrahimov, N. Suleymanov The second initial-boundary value problem for a linear one-dimensional Schrödinger equation with a special gradient term and time dependent measurable boundary complex potential // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 1, 2022, pp. 13-30 (in Russian)
12. Akbaba G.D. The optimal control problem with the Lions functional for the Schrödinger equation including virtual coefficient gradient. Master's thesis, Kars, 2011, 71 pp. (in Turkish).
13. Yagubov G., Toyoglu F., Subasi M. An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation // Applied Mathematics and Computation, vol. 218, iss.11, 2012, pp.6177-6187.
14. M. Zengin, N.S. Ibrahimov, G. Yagub Existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem with boundary functional for nonlinear stationary quasi-optical equation with a special gradient term // Scientific Proceedings Lankaran State University, Mathematical and Natural sciences series, 2021, № 1, pp. 27-42.

15. G.Yakub, N.S. Ibrahimov, M. Zengin Optimal control problem for the stationary quasi-optics equation with a special gradient term // Advanced Mathematical Models and Applications, 2021, Vol. 6, № 3, pp. 252-265.
16. Yagub G., Ibrahimov N.S, Zengin M. Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with a special gradient terms // Abstracts of the XXV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2015), Skhidnytsia, Ukraine, May 11-15, 2015- pp.53-54.
17. Yagub G., Ibrahimov N.S., Aksoy N.Y. On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrödinger equation with special gradient terms // Abstracts of the XXVII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2016), Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27, 2016 - pp.170-171.
18. Ягубов Г., Салманов В., Ягубов В., Зенгин М. Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шредингера // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4 (85), 2017, с. 7-21.
19. G. Yagub, N.S. Ibrahimov and M. Zengin The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, № 2, 2018, pp. 214-232.
20. А. Искендеров, Г. Ягуб, В. Салманов Разрешимость начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Шредингера со специальным градиентным слагаемым и с комплексным потенциалом // Научные труды Нахичеванского Государственного Университета, Серия физико-математических и технических наук, № 4(93), 2018, с. 28-43.
21. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973, 408 с.
22. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М: Наука, 1967, 736 с.
23. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems and applications - vol. 2. Berlin, 1972, 307 p.
24. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982, 332 с.
25. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 430 с.
26. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980, 518 с.

ZAMANDAN ASILI XÜSUSİ QRADİENT TƏRKİBLİ, ÖLÇÜLƏ BİLƏN MƏHDUD KOMPLEKS POTENSİALLI QEYRİ-XƏTTİ QEYRİ-STASİONAR ŞREDİNGER TƏNLİYİ ÜÇÜN İKİNCİ NÖV BAŞLANGIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Natiq İbrahimov

Qabil Yaqub

Tuba Ülkər

Lənkəran Dövlət Universiteti, Lənkəran, Azərbaycan

Qars Qafqaz Universiteti, Qars, Azərbaycan

Bu məqalədə xüsusi qradient həddli və zamandan asılı məhdud ölçülən kompleks potensiallı qeyri-xətti qeyri-stasionar bir ölçülü Şredinger tənliyi üçün ikinci növ başlağic-sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Qalerkin üsulundan istifadə edərək baxılan başlağic-sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi teoremi isbat edilmişdir.

Açar sözlər: qeyri-xətti Şredinger tənliyi, qradient hədd, kompleks potensial, Qalerkin üsulu

THE SECOND INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR ONE-DIMENSIONAL NONSTATIONARY SCHRODINGER EQUATION WITH A SPECIAL GRADIENT TERM AND WITH A MEASURABLE LIMITED COMPLEX POTENTIAL THAT DEPENDS ONLY ON TIME

Natig Ibrahimov

Gabil Yagub

Tuba Ulker

Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan

Kars Kafkas University, Kars, Turkey

In this paper, we consider the second initial-boundary value problem for a nonlinear one-dimensional nonstationary Schrodinger equation with a special gradient term and with a measurable limited complex potential that depends only on time. At the same time, using the Galerkin method, the theorem on the existence and uniqueness of the solution of the second initial boundary value problem under consideration is proved.

Keywords: nonlinear Schrodinger equation, gradient term, complex potential, Galerkin method

Daxil oldu: 17.03.2025

Çap edildi: 26.05.2025